وفق المنهج الجديد
2015

مساعد الطالب في

الرياضيات

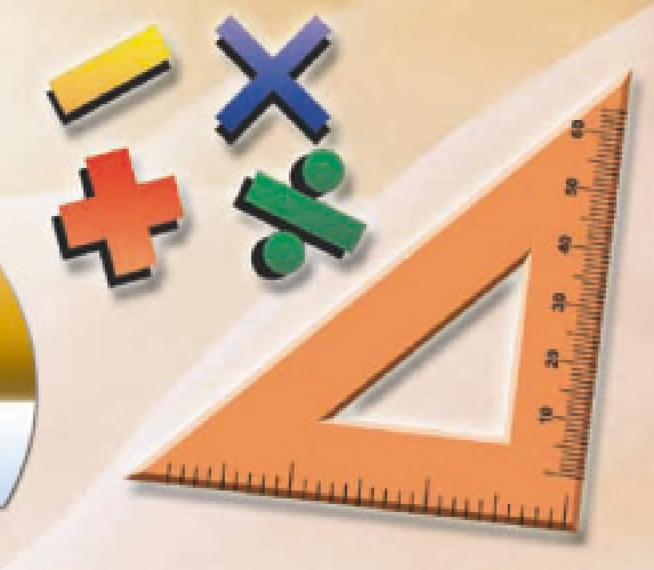
للصف الخامس العلمي

دار الأعرجي للطباعة والنشر والتوزيع

شرح مفصل
وحل جميع تمارين الكتاب

إعداد الأستاذ

رعد كاظم العمار





دار الاعرجي
للطباعة والنشر والتوزيع

الصف الخامس العلمي















عزيزي الطالب :

اطلب من المكتبات ملازم دار الاعرجي للطباعة والنشر والتوزيع

ذات اللونين والاربعة الوان وبالحجمين

الوسط والكبير (A4) لهذا العام وحسب المنهج الجديد



الفصل الاول
chapter 1

اللوغارتمات: Logarithms

المصطلح	الرمز أو العلاقة الرياضية
الدالة الأسية	$f(x) = a^x$
الدالة اللوغارتمية	$y = \log_a x$
اللوغارتمات العشرية	$y = \log x$
اللوغارتمات الطبيعية	$y = \ln x$

الدالة اللوغارتمية: نعلم ان الدالة $f(x) = a^x$, $a > 0$ $a \neq 1$ هي دالة أسية وهي $f(x): R \longrightarrow R^{++}$ دالة تقابل لذلك فلها دالة عكسية (f^{-1}) حيث $f^{-1}: R^{++} \longrightarrow R$ وهي تقابل ايضاً وتدعى الدالة العكسية (بالدالة اللوغارتمية)

ونمثل على ذلك لو رسمنا الدالة $y = 2^x$

والآن نعين النقط في الجدول ونظائرها على المستوي

x	$y = 2^x$
2	4
1	2
0	1
-1	$\frac{1}{2}$

نظائر النقط:

(4 , 2)

(2 , 1)

(1 , 0)

($\frac{1}{2}$, -1)

$y = 2^x$, $y = x$, $y = \log_2 x$

المنحني $y = \log_2 x$ يمثل الدالة العكسية لمنحني الدالة $y = 2^x$

لذلك نرمز للدالة العكسية للدالة الأسية $y = a^x$ بالرمز $x = \log_a y$ فنقول ان x هو لوغارتم y للأساس a وتكتب العلاقة بالشكل:

$$x = \log_a y \iff y = a^x \qquad \forall x \in R \quad y \in R^{++}$$

(R الاعداد الحقيقية ، R^{++} الاعداد الحقيقية الموجبة)

$x = \log_a y$	تسمى الصيغة اللوغارتمية
$y = a^x$	تسمى الصيغة الأسية

مثال1/ اكتب كلاً مما يأتي بالصيغة اللوغارتمية:

1) $5^3 = 125 \Longrightarrow \log_5 125 = 3$

2) $0.001 = 10^{-3} \Longrightarrow \log_{10} 0.001 = -3$

3) $2 = 32^{\frac{1}{5}} \Longrightarrow \log_{32} 2 = \frac{1}{5}$

مثال2/ اكتب كلاً مما يأتي بالصورة الأسية:

1) $\log_7 49 = 2 \Longrightarrow 49 = 7^2$

2) $\log_{\sqrt{2}} 64 = 12 \Longrightarrow 64 = (\sqrt{2})^{12}$

3) $\log_{10} 10000 = 4 \Longrightarrow 10000 = 10^4$

خواص الدالة اللوغارتمية:

1) لكل عدد حقيقي موجب لوغارتم

2) ليس للعدد الحقيقي السالب لوغارتم

3) بما أن الدالة اللوغارتمية تقابل فإن:

$$x = y \iff \log_a x = \log_a y \qquad \forall x, y \in R^{++}$$

4) **قواعد في اللوغارتمات:**

$x, y \in R^{++}, \quad a \neq 1, \quad a > 0$

a) $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$

b) $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

c) $\log_a x^n = n \log_a x \quad \forall n \in R$

d) $\log_a a = 1$ لوغاريتم اي عدد لنفس الاساس = 1

e) $\log_a 1 = 0$ لوغاريتم العدد (1) يساوي صفر

ملاحظة :

لاحظ ما يلي

* $\log_a (x \cdot y) \neq \log_a x \cdot \log_a y$
* $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) \neq \frac{\log_a x}{\log_a y} \quad y \neq 0$
* $\log_a x^n \neq (\log_a x)^n$

مثال/

اثبات :

$$\log_2\left(\frac{17}{5}\right) - \log_2\left(\frac{34}{45}\right) + 2\log_2\left(\frac{2}{3}\right) = 1$$

$$L.H = \log_2\left(\frac{17}{5}\right) - \log_2\left(\frac{34}{45}\right) + \log_2\left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$= \log_2 \frac{17}{5} \div \frac{34}{45} \times \frac{4}{9}$$

$$= \log_2 \frac{17}{5} \times \frac{45}{34} \times \frac{4}{9} = \log_2 2 = 1$$

$$\therefore L.H = R.H$$

مثال/ حل المعادلات الآتية :

1) $\log_3 x = 4 \Rightarrow x = 3^4 \Rightarrow x = 81 \quad \therefore S = \{81\}$

2) $\log_x 64 = 6 \Rightarrow 64 = x^6 \Rightarrow 2^6 = x^6 \rightarrow x = \mp 2$

$\therefore x = 2 \quad \therefore S = \{2\}$. السالب يهمل لا يوجد أساس سالب

3) $\log_5 \frac{1}{125} = x \Rightarrow \frac{1}{125} = 5^x \Rightarrow \frac{1}{5^3} = 5^x$

$\therefore 5^{-3} = 5^x \Longrightarrow x = -3$

$\therefore S = \{-3\}$

4) $\log_x 343 = 3 \Rightarrow 343 = x^3 \Rightarrow 7^3 = x^3 \Rightarrow x = 7$

$\therefore S = \{7\}$

مثال/

أ) جد العدد الذي لوغاريتمه للأساس ($\frac{1}{4}$) هو (2.5)

الحل/ نفرض العدد = x ⇐

$\log_{\frac{1}{4}} x = 2.5$

$\therefore x = (\frac{1}{4})^{2.5} \Rightarrow x = (\frac{1}{2^2})^{2.5} \Rightarrow x = \frac{1}{32}$

ب) جد الأساس العدد (0.01) الذي لوغاريتمه (1)

الحل/ نفرض الأساس = x ⇐

$\log_x 0.01 = 1 \Rightarrow 0.01 = x^1$

$\therefore x = 0.01$

جـ) جد لوغاريتم العدد ($\frac{1}{8}$) للأساس 2

الحل/ نفرض اللوغاريتم = x ⇐

$\log_2 \frac{1}{8} = x \Rightarrow \frac{1}{8} = 2^x \Rightarrow 2^{-3} = 2^x$

$\therefore x = -3$

تمارين (1 - 1)

1) جد قيمة x لكل مما يأتي:

a) $\log_{10} 0.00001 = x \Rightarrow 0.00001 = 10^x$

$\Rightarrow 10^{-5} = 10^x \Rightarrow x = -5$

b) $\log_x 16 = -4 \Rightarrow 16 = x^{-4} \Rightarrow 2^4 = (\frac{1}{x})^4$

$\Rightarrow \frac{1}{x} = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

c) $\log_{10} x = 5 \Rightarrow x = 10^5 \Rightarrow x = 100000$

---

2) اكتب الصورة الأخرى لكل مما يأتي:

a) $\log_{10} 10000 = 4 \Rightarrow 10000 = 10^4$

b) $7^3 = 343 \Rightarrow \log_7 343 = 3$

c) $\log_5 \frac{1}{25} = -2 \Rightarrow \frac{1}{25} = 5^{-2}$

d) $(0.01)^2 = 0.0001 \longrightarrow \log_{0.01} 0.0001 = 2$

---

3) فيما يلي علاقات غير صحيحة دائماً. اعطِ $x = a$ ، $y = a$ حيث $a > 0$ وبين ذلك :

a) $\log_a (x+y) \neq \log_a x + \log_a y$

$\log_a (a+a) \neq \log_a a + \log_a a$

$\log_a 2a \neq 1+1$

$\log_a 2 \times a \neq 2$

$\log_a 2 + \log_a a \neq 2$

$\therefore \log_a 2 + 1 \neq 2$

∴ الطرف الايمن ≠ الطرف الايسر

---

b) $\log_a xy \neq \log_a x \cdot \log_a y$

$\log_a x + \log_a y \neq \log_a a \cdot \log_a a$

$\log_a a + \log_a a \neq 1 \times 1$

$1 + 1 \neq 1$

$2 \neq 1$

∴ الطرف الايمن ≠ الطرف الايسر

---

c) $\log_a x^2 \neq (\log_a x)^2$

$2\log_a x \neq (\log_a a)^2$

$2\log_a a \neq (1)^2 \Rightarrow 2 \times 1 \neq 1 \Rightarrow 2 \neq 1 \quad \therefore L.H \neq R.H$

4) جد قيمة ما يأتي :

a) $\log_{10}\frac{40}{9} + 4\log_{10}5 + 2\log_{10}6$

$= \log_{10}\frac{40}{9} + \log_{10}(5)^4 + \log_{10}(6)^2$

$= \log_{10}\frac{40}{9} \times 625 \times 36 = \log_{10}100000 = \log_{10}10^5 = 5$

---

b) $2\log_{10}8 + \log_{10}125 - 3\log_{10}2$

$= \log_{10}(8)^2 + \log_{10}125 - \log_{10}(2)^3$

$= \log_{10}64 + \log_{10}125 - \log_{10}8 = \log_{10}\frac{64 \times 125}{8}$

$= \log_{10}1000 = \log_{10}10^3 = 3\log_{10}10 = 3 \times 1 = 3$

---

c) $\log_a(x^2-4) - 2\log_a(x-2) + \log_a\frac{(x-2)}{(x+2)}$

$= \log_a(x^2-4) - \log_a(x-2)^2 + \log_a\frac{(x-2)}{(x+2)}$

$= \log_a(x^2-4) \div (x-2)^2 \times \frac{(x-2)}{(x+2)}$

$= \log_a(x-2)(x+2) \times \frac{1}{(x-2)^2} \times \frac{(x-2)}{(x+2)} = \log_a 1 = 0$

---

5) اذا كانت $\log_{10}2 = 0.3010$ ، $\log_{10}3 = 0.4771$ جد قيمة كل ما يأتي :

a) $\log_{10}0.002 = \log_{10}\frac{2}{1000} = \log_{10}2 - \log_{10}1000$

$= 0.3010 - \log_{10}10^3 = 0.3010 - 3\log_{10}10$

$= 0.3010 - 3 \times 1$

$= \bar{3}.3010$

b) $\log_{10} 2000 = \log_{10} 2 \times 1000 = \log_{10} 2 + \log_{10} 1000$

$= 0.3010 + 3 = 3.3010$

---

c) $\log_{10} 12 = \log_{10} 3 \times 2^2 = \log_{10} 3 + \log_{10} 2^2$

$= \log_{10} 3 + 2\log_{10} 2 = 0.4771 + 2(0.3010)$

$= 0.4771 + 0.6020 = 1.0791$

---

6) حل المعادلات الآتية:

a) $\log_3 (2x-1) + \log_3 (x+4) = \log_3 5$

الحل/

$2x-1 > 0 \Rightarrow 2x > 1 \Rightarrow x > \frac{1}{2}$

$x+4 > 0 \Rightarrow x > -4$

$\therefore S = \{x : x > \frac{1}{2}\}$ مجموعة التعويض

$\therefore \log_3 (2x-1) \cdot (x+4) = \log_3 5$

$\therefore (2x-1)(x+4) = 5 \Rightarrow 2x^2 + 8x - x - 4 = 5$

$\therefore 2x^2 + 7x - 9 = 0 \Rightarrow (x-1)(2x+9) = 0$

either $x-1 = 0 \Rightarrow x = 1 \in$ مجموعة التعويض

or $2x+9 = 0 \Rightarrow x = \frac{-9}{2} \notin$ مجموعة التعويض

$\therefore S = \{1\}$ ج

---

b) $\log_2 (3x+5) - \log_2 (x-5) = 3$

الحل/

$3x+5 > 0 \Rightarrow 3x > -5 \Rightarrow x > \frac{-5}{3}$

$x-5 > 0 \Rightarrow x > 5$

$\therefore S = \{x : x > 5\}$ مجموعة التعويض

$\therefore \log_2 (3x+5) \div (x-5) = 3$

$\log_2 \frac{(3x+5)}{(x-5)} = 3 \Rightarrow \frac{(3x+5)}{(x-5)} = 2^3$

$\therefore\ 3x + 5 = 8(x - 5) \Rightarrow 3x + 5 = 8x - 40 \Rightarrow$

$8x - 3x = 5 + 40 \Rightarrow 5x = 45 \Rightarrow x = 9 \in$ مجموعة التعويض

$\therefore\ S = \{9\}$ مجموعة التعويض

---

c) $\log_a \frac{6}{5} + \log_a \frac{5}{66} - \log_a \frac{132}{121} + \log_a 12 = x$

الحل/

$\log_a \frac{6}{5} \times \frac{5}{66} \times 12 \div \frac{132}{121} = x$

$\log_a \frac{6}{5} \times \frac{5}{66} \times \frac{12}{1} \times \frac{121}{132} = x$

$\log_a 1 = x \Rightarrow 0 = x$

$\therefore\ S = \{0\}$ مجموعة الحل

---

d) $\log_{10}(3x - 7) + \log_{10}(3x + 1) = 1 + \log_{10} 2$

الحل/

$3x - 7 > 0 \Rightarrow 3x > 7 \Rightarrow x > \frac{7}{3}$

$3x + 1 > 0 \Rightarrow 3x > -1 \Rightarrow x > \frac{-1}{3}$

$\therefore\ S = \{x : x > \frac{7}{3}\}$ مجموعة التعويض

$\therefore\ \log_{10}(3x - 7)(3x + 1) = \log_{10} 10 + \log_{10} 2$

$\log_{10}(9x^2 + 3x - 21x - 7) = \log_{10} 10 \times 2$

$\log_{10}(9x^2 - 18x - 7) = \log_{10} 20$

$\therefore\ 9x^2 - 18x - 7 = 20 \Rightarrow 9x^2 - 18x - 27 = 0\ ] \div 9$

$\therefore\ x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x - 3)(x + 1) = 0$

either $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3 \in$ مجموعة التعويض

or $x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \notin$ مجموعة التعويض

$\therefore\ S = \{3\}$ مجموعة الحل

اللوغاريتمات العشرية : Decimal Logarithms

نعلم ان اساس أي لوغاريتم $a \neq 1 ، a > 0$

واللوغاريتمات العشرية اساسها 10 ويسمى اللوغاريتم الاعتيادي وقد اتفق على عدم كتابة الأساس (10) حيث استعماله ، عندما يكتب لوغاريتم بدون أساس يعني أساسه (10) مثل:

$\log_{10} 8$ يكتب $\log 8$ و $\log_{10} x$ يكتب $\log x$

تذكر ان $\log 10^n = n$

مثل: $\log 0.01 = -2$ ، $\log 10^{-3} = -3$ ، $\log 10^5 = 5$ وهكذا .

اللوغاريتمات الطبيعية : Natural Logarithms

اللوغاريتم الطبيعي أساسه «e»

حيث $e = 2.718281828459045$ ويمكن ايجاده حسب :

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad \text{أو} \quad \lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n!}\right)$$

وبالتقريب $e = 2.71828$

ويكتب بالشكل : $\log_e y$ أو بالشكل «ln» لتميزها عن اللوغاريتم العشري «log»

$$\therefore x = \log_e y \Rightarrow x = \ln y \Leftrightarrow y = e^x$$

قواعد اللوغاريتمات الطبيعية هي نفس قواعد اللوغاريتمات العشرية .

نتيجة 1// $\ln e^x = x \quad \forall x \in R$

البرهان: $L.H = \ln e^x = x \ln e = x \cdot 1 = x$

$\therefore L.H = R.H$ اي الطرف الايمن = الطرف الايسر

نتيجة 2// قاعدة تبديل الاساس

$a > 0 \; , \; a \neq 1$

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} \quad , \quad \log_a x = \frac{\log x}{\log a}$$ بالاساس (10)

البرهان: $L.H$ Let $y = \log_a x \Rightarrow x = a^y$ ....①

نأخذ اللوغاريتم الطبيعي لطرفي العلاقة ①

$$\ln x = \ln a^y \Rightarrow \ln x = y \ln a$$

$$\therefore y = \frac{\ln x}{\ln a} \Rightarrow \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} = R.H$$

$\therefore L.H = R.H$ الطرف الايمن = الطرف الايسر

مثال// ساحتية

$$1/\log_3 15 + 1/\log_5 15$$

الحل/

$$\frac{1}{\frac{\ln 15}{\ln 3}} + \frac{1}{\frac{\ln 15}{\ln 5}} = \frac{\ln 3}{\ln 15} + \frac{\ln 5}{\ln 15}$$

$$= \frac{\ln 3 + \ln 5}{\ln 15} = \frac{\ln (3 \times 5)}{\ln 15} = \frac{\ln 15}{\ln 15} = 1$$

استخدام الآلة الحاسبة:

اولاً: ايجاد لوغاريتم العدد :

1) في حالة اللوغاريتمات العشرية (Log) حيث نكتب العدد المعطى ثم نضغط على المفتاح Log فيظهر الناتج .

مثال/ استخدم الحاسبة لتجد:

1) $\log 7$

الحل/ نكتب العدد 7 ثم نضغط على Log فالناتج = 0.84509804

2) $\log 13$

الحل/ نكتب العدد 13 ثم نضغط على Log فالناتج = 1.11394135 2

2) في حالة اللوغاريتمات الطبيعية " Ln "

اكتب العدد ثم اضغط على المفتاح ln فيظهر الناتج مثل : ln 7

اكتب العدد 7 ثم اضغط ln فيظهر الناتج = 1.94590149

ثانياً : ايجاد العدد المقابل اذا علم لوغاريتمه :

1) نكتب لوغاريتم العدد المعطى ثم نضغط على 2nd F ثم نضغط على Log فيظهر العدد المطلوب (بعض الحاسبات .INV)

مثال/ جد العدد المقابل للوغاريتم 0.84509804 .

الحل/ اكتب العدد المذكور ثم اضغط 2ndf ثم اضغط Log فيظهر 7.

مثال/ جد العدد المقابل للوغاريتم 1.09691001 3

الحل/ اضغط مفتاح (-) واكتب 1.09691013 ثم نضغط فيظهر -1.09691013 ثم نضغط 2ndF ثم log يظهر 0.08 .

2) في حالة اللوغارتمات الطبيعية « Ln »
اكتب لوغارتم العدد المعطى ثم نضغط على مفتاح 2ndF ثم نضغط Ln فيظهر العدد .

مثال/ جد العدد المقابل للوغارتم الطبيعي .

1) 1.945910149

اكتب العدد ثم اضغط 2ndF ثم Ln فيظهر العدد 7 .

2) -2.525728644

اضغط (-) ثم اكتب العدد ثم (=) فيظهر سالب العدد ثم اضغط 2ndF ثم Ln فيظهر الناتج 0.08 .

أمثلة // 1) جد قيمة $\log_4 3$

باستخدام قاعدة تبديل الأساس

$$\log_4 3 = \frac{\log 3}{\log 4} = \frac{0.4771}{0.6021}$$

$$= 0.7924$$

2) جد قيمة $\log 7 + \ln 5$

الحل/ نجد باستخدام الحاسبة $\log 7 = 0.8451$, $\ln 5 = 1.6094$

$$\therefore \log 7 + \ln 5 \cong 0.8451 + 1.6094 = 2.4545$$

---

3) جد قيمة $\log_5 16 - \log_5 2$

الحل/ نستخدم قاعدة تبديل الأساس :

$$\log_5 16 - \log_5 2 = \log_5 \frac{16}{2} = \log_5 8 = \frac{\ln 8}{\ln 5} \cong \frac{2.0794415}{1.6094379}$$

$$\cong 1.2920296$$

4) جد قيمة $x = (1.05)^{15}$ باستخدام اللوغارتم

الحل/ نأخذ لوغارتم الطرفين

$$\log x = \log (1.05)^{15}$$

$$\log x = 15 \log (1.05) \Rightarrow \log x = 15 \times 0.0212$$

$$\therefore \log x = 0.3180$$

$\therefore \quad x = 2.0797$

⑤ حل المعادلة $3^{2x-1} = 4$

الحل/ نأخذ لوغاريتم الطرفين للعشرة

$\log 3^{2x-1} = \log 4 \Rightarrow$

$(2x-1)\log 3 = \log 4$

$(2x-1)(0.4771) = 0.6021$

$2x-1 = \frac{0.6021}{0.4771} \Rightarrow 2x-1 = 1.2620$

$\Rightarrow 2x = 2.2620 \Rightarrow x = 1.1310$

$\therefore S = \{1.1310\}$ مجموعة الحل

---

⑥ جد الوسط الهندسي للأعداد $13, 14, 15, 16$

الحل/ الوسط الهندسي $= \sqrt[n]{(x_1)(x_2)(x_3)\cdots(x_n)}$

$M = \sqrt[4]{(13)(14)(15)(16)}$

$\log M = \log \sqrt[4]{(13)(14)(15)(16)} \Rightarrow \log M = \frac{1}{4}\log(13 \times 14 \times 15 \times 16)$

$\Rightarrow \log M = \frac{1}{4}[\log 13 + \log 14 + \log 15 + \log 16]$

$\Rightarrow \log M = \frac{1}{4}[1.1139 + 1.1462 + 1.1761 + 1.2041]$

$= \frac{1}{4} \times 4.6403 = 1.1601$

$\therefore M = 14.458$

---

⑦ أوجد الرقم الهيدروجيني لماء البحر اذا كان تركيز أيونات الهيدروجين $[H^+]$ له حوالي 3.2×10^{-9}

الحل/ الرقم الهيدروجيني

$pH = -\log[H^+]$ قانون

$= -\log 3.2 \times 10^{-9}$

$= -[\log 3.2 + \log 10^{-9}]$

$= -[\log 3.2 - 9\log 10]$

$= -[\log 3.2 - 9]$

$= -\log 3.2 + 9$

$= -0.5052 + 9 = 8.494$

---

⑧ اذا استثمرت مبلغ (2) مليون دينار بفائدة مركبة سنوية مستمرة قدرها 2% أوجد جملة ما ستحصل عليه بعد (15) سنوات

الحل/ قانون حساب الفائدة المركبة $R = m e^{n \cdot r}$

حيث m = المبلغ ، r = الفائدة ، n = عدد السنوات .

$$R = 2.000000 \times e^{\frac{2}{100} \times 10}$$

$$R = 2.000000 \times e^{\frac{1}{5}}$$

نأخذ Ln الطرفين

$$\ln R = \ln 2.000000 + \ln e^{\frac{1}{5}}$$

$$\ln R = \ln 2.000000 + \frac{1}{5}$$

$$= 14.7087$$

$$\therefore R = 2442805.5 \text{ دينار}$$ الجملة

---

③ استخدم صاروخ لدفع سفينة فضائية . فإذا كانت نسبة كتلته 20 وسرعة انطلاق البخار 1.5 كم/ثا وزمن الاشتعال 100 ثانية . جد سرعة الصاروخ .

الحل/ استخدم العلاقة $S = -0.0098n + V\ln k$

حيث S = سرعة الصاروخ n = الزمن ، V = سرعة انطلاق البخار ، k = نسبة كتلته

$$S = -0.0098 \times 100 + 1.5 \ln 20$$

$$= -0.98 + 1.5(2.9956)$$

$$= -0.98 + 4.4934$$

$$\therefore S = 3.5134 \text{ km/sec}$$ سرعة الصاروخ



تمارين (2 - 1)

"استخدم آلتك الحاسبة"

1) جد نتيجة كل مما يأتي:

a) $\log_{10} 8 = 0.90308$

الحل/ اكتب العدد 8 ثم اضغط وما يظهر الناتج

b) $\log_3 15 = \frac{\log 15}{\log 3}$

الحل/ نستخدم قاعدة تبديل الأساس وبنفس الطريقة نجد البسط والمقام ونأخذ الناتج هو نتيجة $\log_3 15$

$= \frac{1.17609}{0.4771} = 2.4542$

c) $\ln 200 = 5.2983$

الحل/ اكتب العدد 200 ثم اضغط ln ما يظهر الناتج

2) جد نتيجة كل مما يأتي:

a) $\log_2 52 - \log 27$

الحل/ نستخدم قاعدة تبديل الأساس للحد الأول والحد الثاني مباشرة مثل السؤال الأول (a)

$= \frac{\log 52}{\log 2} - \log 27$

$= \frac{1.7160}{0.3010} - 1.4314 = 5.7010 - 1.4314 = 4.2696$

b) $\log 33 + \log_8 33 + \ln 33$

الحل/ الحد الأول والثالث كما سبق والحد الثاني نستخدم قاعدة تبديل الأساس ثم نجد الناتج:

$= \log 33 + \frac{\log 33}{\log 8} + \ln 33 = 1.5185 + \frac{1.5185}{0.9030} + 3.4965$

$= 1.5185 + 1.7514 + 3.4965 = 6.7664$

3) جد نتيجة كل مما يأتي:

a) $\sqrt[3]{(65.26)^2}$

الحل/ نفرض المقدار = x ونأخذ لوغاريتم الطرفين:

$x = \sqrt[3]{(65.26)^2} \Rightarrow x = (65.26)^{2/3}$

$\therefore \log x = \log (65.26)^{2/3} \Rightarrow \log x = \frac{2}{3} \log (65.26)$

$\log x = \frac{2}{3} \times (1.8146) = 1.2097$

$\therefore x = 16.2081$

ثم نجد العدد x المقابل للوغاريتم أي نكتب العدد 1.2097 ثم نضغط 2ndF ثم نضغط وما يظهر نتيجة x .

b) $(1.02)^{10}$

الحل/ نفرض المقدار = x ونأخذ لوغاريتم الطرفين

$x = (1.02)^{10}$

$\log x = 10 \log(1.02) = 10 \times (0.0086) = 0.086$

$\therefore x = 1.2190$

---

4) حل كلاً من المعادلات الآتية :

a) $3^x = 26$

الحل/ نأخذ لوغاريتم الطرفين .

$\log 3^x = \log 26 \Rightarrow x \log 3 = \log 26$

$\therefore x = \frac{\log 26}{\log 3} = \frac{1.4150}{0.4771} = 2.9658$

---

b) $e^{3x+1} = 17$

الحل/ نأخذ ln الطرفين

$\ln e^{3x+1} = \ln 17$

ملاحظة: يمكن مباشرة Ln e يرفع الى أي أس = الأس نفسه

$\therefore (3x+1)\ln e = \ln 17 \Rightarrow 3x+1 = 2.8332$

$\therefore 3x = 2.8332 - 1 = 1.8332$

$\therefore x = \frac{1.8332}{3} = 0.6111$

---

c) $(5)(2^x) = 4^{1-x}$

الحل/ نأخذ لوغاريتم الطرفين:

$\log(5)(2^x) = \log 4^{1-x}$

$\log 5 + \log 2^x = (1-x)\log 4$

استخدام خواص اللوغاريتمات

$0.6990 + x(0.3010) = (1-x)(0.6020)$

$0.3010x = 0.6020 - 0.6020x - 0.6990$

$\therefore 0.3010x + 0.6020x = -0.0970$

$0.9030x = -0.0970 \Rightarrow x = \frac{-0.0970}{0.9030} = -0.1074$

---

5) جد الوسط الهندسي للأعداد الآتية: 10، 11، 12، 13، 14، 15

الحل/ نأخذ لوغاريتم الطرفين

$M = \sqrt[6]{(10)(11)(12)(13)(14)(15)}$

$M = (10)(11)(12)(13)(14)(15)^{1/6}$

$\log M = \frac{1}{6}\log[(10)(11)(12)(13)(14)(15)] \Rightarrow$

$\log M = \frac{1}{6}[\log 10 + \log 11 + \log 12 + \log 13 + \log 14 + \log 15]$

$\log M = \frac{1}{6}[1 + 1.0414 + 1.0792 + 1.1139 + 1.1462 + 1.1761]$

باستخدام الحاسبة نجد العدد M المقابل للوغاريتم $\therefore \log M = 1.0929 \Rightarrow M = 12.38$

---

6) أثبت أن:

a) $\frac{1}{\log_a abc} + \frac{1}{\log_b abc} + \frac{1}{\log_c abc} = 1$

الحل: نأخذ الطرف الأيسر L.H وباستخدام قاعدة تبديل الأساس

$$L.H = \frac{1}{\frac{\log abc}{\log a}} + \frac{1}{\frac{\log abc}{\log b}} + \frac{1}{\frac{\log abc}{\log c}} =$$

$$\frac{\log a}{\log abc} + \frac{\log b}{\log abc} + \frac{\log c}{\log abc} = \frac{\log a + \log b + \log c}{\log abc}$$

$$= \frac{\log abc}{\log abc} = 1 \quad R.H$$ الطرف الأيمن

$$\therefore L.H = R.H$$

---

b) $\log \frac{40}{9} + 2(2\log 5 + \log 6) = 5$

الحل/

$$L.H = \log \frac{40}{9} + 4\log 5 + 2\log 6$$

$$= \log \frac{40}{9} + \log 5^4 + \log 6^2$$ نستخدم خواص اللوغاريتمات

$$= \log \frac{40}{9} \times 5^4 \times 6^2 = \log \frac{40}{9} \times 625 \times 36 = \log 100000$$

$$= \log 10^5 = 5\log 10 = 5 \times 1 = 5 \quad R.H$$

$$\therefore L.H = R.H$$

---

7) اذا كان: $b = \log_a c$ ، $a = \log_c b$ فأن $\log_b a = \frac{1}{ab}$

الحل/ نأخذ الطرف الايمن R.H وبالتعويض عن a , b

$$\frac{1}{a \cdot b} = \frac{1}{\log_c b \cdot \log_a c} = \frac{1}{\frac{\log b}{\log c} \cdot \frac{\log c}{\log a}}$$

وباستخدام قاعدة تبديل الاساس

$$= \frac{1}{\frac{\log b}{\log a}} = \frac{\log a}{\log b} = \log_b a$$

$\therefore$ الطرف الايمن = الايسر $\therefore L.H = R.H$

⑧ تركيز أيونات الهيدروجين $[H^+]$ في اللبن هو 2.5×10^{-7} جد الرقم الهيدروجيني له.

P

$P.H = -\log 2.5 \times 10^{-7}$

$= -[\log 2.5 + \log 10^{-7}]$

$= -[\log 2.5 - 7\log 10]$ ملاحظة: $\log 10 = 1$

$= -[0.3979 - 7]$

$= -0.3979 + 7 = 6.6021$ الرقم الهيدروجيني

---

⑨ باستخدام قانون الفائدة المركبة $R = me^{n.r}$ لاستثمار مليون دينار بفائدة قدرها 2.5% ولمدة (6) سنوات. جد جملة ما سيحصل عليه.

الحل/

$R = me^{n.r} \Rightarrow R = 1000000 \times e^{\frac{2.5}{100} \times 6}$

$\therefore R = 1000000\, e^{\frac{15}{100}}$ نأخذ ln الطرفين

$\ln R = \ln 1000000 + \ln e^{\frac{15}{100}}$ نفس قواعد اللوغاريتمات

$\ln R = 13.8155 + \frac{15}{100} = 13.8155 + 0.15 = 13.9655$

الجملة $\therefore R = 1161821.976$ دينار

---

⑪ أي مقدار (مقادير) يكافئ المقدار $2\log a - \log b$ ؟

① $\log (a/b)^2 = 2\log \frac{a}{b} = 2(\log a - \log b)$

② $\log \frac{a^2}{b} = \log a^2 - \log b = 2\log a - \log b$ *

③ $\log (ab)^2 = 2\log ab = 2(\log a + \log b)$

④ $\log a^2 - \log b = 2\log a - \log b$ *

الجواب (2) ، (4)

---

⑩ جد سرعة صاروخ نسبة كتلته نحو 10 ، وسرعة انطلاق بخاره قدرها 3.5 كم/ثا وزمن اشتعاله الحر 50 ثانية.

الحل/ العلاقة لإيجاد سرعة الصاروخ

$S = -0.0098\, n + v \ln k$

حيث S سرعة الصاروخ ، n = الزمن ، V : سرعة انطلاق البخار ، k : نسبة كتلة

$\therefore S = -0.0098 \times 50 + 3.5 \ln 10$

$= -0.49 + 3.5 \times 2.30258$

$= -0.49 + 8.059047 = 7.569047$

$\therefore S = 7.569047 \ km/sec$ سرعة الصاروخ

---

⑫ في سنة 1997 حدثت هزة أرضية في إحدى المدن العالمية بدرجة 4.9 والمصنف على مقياس ريختر ، وحدثت هزة أخرى في مدينة أخرى سنة 1999 بمقدار 7.0 قارن بين الطاقة المنطلقة من هاتين الهزتين .

الحل

$$R = \frac{E\,30^{4.9}}{E\,30^{7.0}} = \frac{30^{4.9}}{30^{7.0}} \Rightarrow R = 30^{4.9-7.0} \Rightarrow R = 30^{-2.1}$$

نأخذ لوغاريتم الطرفين

$$\log R = \log 30^{-2.1} \Rightarrow \log R = -2.1 \log 30$$

$\therefore \log R = -2.1 \times 1.4771 = -3.1019$

باستخدام الحاسبة لإيجاد العدد المقابل للوغاريتم نحصل على :

$\therefore R = 0.044361$

---

⑬ أختر الإجابة الصحيحة للمقدار $\log a/b$

① $\log a / \log b$ ، ② $\log a - \log b$ ③ $\log(a-b)$ ④ ليس أي منها .

الحل /

$\log a/b = \log a - \log b$ الإجابة رقم ②

(أسئلة اثرائية)

① أثبت أن :

$$\log_7 343 - \log_5 125 + \log_3 81 = 4$$

الحل /

$L.H = \log_7 7^3 - \log_5 5^3 + \log_3 3^4$

$= 3\log_7 7 - 3\log_5 5 + 4\log_3 3$

$= 3 \times 1 - 3 \times 1 + 4 \times 1 = 4 \quad R.H$

$\therefore L.H = R.H$

2) أثبت أن:

$$\log_2 \frac{1}{32} - \log_2 32 = -10$$

الحل/

$$L.H = \log_2 \frac{1}{2^5} - \log_2 2^5 = \log_2 2^{-5} - 5\log_2 2$$

$$= -5\log_2 2 - 5\log_2 2 = -10\log_2 2 = -10 \times 1 = -10 \quad R.H$$

$$\therefore L.H = R.H$$

3) حل المعادلة التالية بأستخدام اللوغارتمات:

$$2^{x^2-2x+1} = 4^{x-1}$$

الحل/

$$2^{x^2-2x+1} = 2^{2(x-1)} \Longrightarrow 2^{x^2-2x+1} = 2^{2x-1}$$

نأخذ لوغاريتم الطرفين

$$\log 2^{x^2-2x+1} = \log 2^{2x-2} \Longrightarrow$$

$$(x^2-2x+1)\log 2 = (2x-2)\log 2 \Longrightarrow$$

$$x^2-2x+1 = 2x-2 \Longrightarrow x^2-4x+3=0$$

$$(x-3)(x-1)=0 \Longrightarrow x=3 \ , \ x=1$$

مجموعة الحل $\therefore S = \{1, 3\}$

4) اثبت أن:

$$2\log 8 + \log 125 - 3\log 200 = -3$$

الحل/

$$L.H = \log 8^2 + \log 125 - \log 200^3$$

$$= \log 8^2 \times 125 \div 200^3 = \log \frac{64 \times 125}{200 \times 200 \times 200}$$

$$= \log \frac{1}{1000} = \log 10^{-3} = -3\log_{10} 10 = -3 \times 1 = -3$$

$$\therefore L.H = R.H$$

أسئلة واجب:

1) اثبت أن:

$$\frac{2}{\log_3 60} + \frac{2}{\log_4 60} + \frac{2}{\log_5 60} = 2$$

2) اثبت أن:

$$\frac{3}{\log_a abc} + \frac{3}{\log_b abc} + \frac{3}{\log_c abc} = 3$$

الفصل الثاني
chapter 2

المتتابعات : Sequences

	المصطلح	الرمز او العلاقة الرياضية .
	الحد الاول	a
أساس	المتتابعة الحسابية	$d = U_{n+1} - U_n$
أساس	المتتابعة الهندسية	$r = \frac{U_{n+1}}{U_n}$
الحد العام	للمتتابعة الحسابية	$U_n = a + (n-1)d$
الحد العام	للمتتابعة الهندسية	$U_n = ar^{n-1}$
مجموع	المتتابعة الحسابية	$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$
مجموع	المتتابعة الهندسية	$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$
	مجموع المتتابعة الهندسية اللانهائية	$S_\infty = \frac{a}{1-r}$

جملة قوانين المتتابعات

المتتابعات : Sequences

تعريف // المتتابعة هي دالة مجالها Z^+ (مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة) وفي هذه الحالة تسمى متتابعة غير منتهية او أي مجموعة جزئية مرتبة ومنتهية تنتمي الى Z^+ حيث تبدأ بالعدد (1) أي على الصورة $\{1,2,3,4,......n\}$ وفي هذه الحالة تسمى متتابعة منتهية.

مثال // لتكن $f=\{1,2,3,......,10\}\to R$ دالة حيث $f(n)=5+2n$ يمكن تعيين صورة لكل عدد من مجموعة المجال وفق العلاقة المذكورة فان:

$f(1)=5+2(1)=7$ ، $f(2)=5+2(2)=9$ ، $f(3)=5+2(3)=11$

...... ، $f(10)=5+2(10)=25$

ويعبر عن هذه الدالة على صورة ازواج مرتبة كالتالي:

$\{(1,7),(2,9),(3,11),....,(10,25)\}$

لاحظ ان مجال هذه الدالة هو المجموعة $\{1,2,3,......,10\}$ وان مدى هذه الدالة هي المجموعة $\{7,9,11,....,25\}$ فان هذه الدالة تسمى (متتابعة) وعناصر مداها هي مجموعة (الحدود) وتسمى بـ [حدود المتابعة]

ولكن الدالة $f=\{(1,3),(2,7),(5,4),(6,10),(7,9)\}$ لا تسمى متتابعة لان مجالها $\{1,2,5,6,7\}$ وليس الاعداد بالتسلسل ابتداء من العدد (1) فلكي تكون متتابعة يجب ان يكون المجال $\{1,2,3,4,5,6,7\}$

امثلة: 1) لتكن $f(n)=\frac{1}{n}$ حيث $n\in Z^+$ اكتب حدود المتتابعة؟

ملاحظة: حدود المتتابعة هي مجموعة الصور الناتجة من تعويض عناصر Z^+ في الدالة $f(n)$ وبترتيب ابتداءً من العدد (1)

$f(1)=\frac{1}{1}=1$ الحد الاول ، $f(2)=\frac{1}{2}$ الحد الثاني

$f(3)=\frac{1}{3}$ الحد الثالث ، $f(4)=\frac{1}{4}$ الحد الرابع ، $f(5)=\frac{1}{5}$ الحد الخامس وهكذا..

∴ المتتابعة تكتب بالشكل: $\langle 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, ...\rangle$

ذكرنا قوسي مجموعة عناصر المتتابعات بالشكل < > لكي نميزها عن قوسي المجموعة الاعتيادية { }.

مثال 2// لتكن $f(n) = n^2 + 1$ ، $n \in \{1, 2, 3, \ldots, 20\}$ اكتب المتتابعة.

الحل/

$f(1) = (1)^2 + 1 = 2$

$f(2) = (2)^2 + 1 = 5$

$f(3) = (3)^2 + 1 = 10$

$\vdots$

$f(20) = (20)^2 + 1 = 401$

$\therefore$ المتتابعة $\langle 2, 5, 10, \ldots, 401 \rangle$

مثال 3// لتكن $f(n) = n$ ، $n \in R$ هل تمثل متتابعة ؟

الحل/ ليست متتابعة لأن مجالها ليس Z^+ أو مجموعة مرتبة منها على صورة $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$

ملاحظة: اذا لم يحدد مجال المتتابعة نعتبره Z^+

مثال 4// اكتب الحدود الستة الأولى للمتتابعة

$$f(n) = \begin{cases} 4 - n & \text{فردي } n \\ n^2 & \text{زوجي } n \end{cases}$$

n زوجي (even)	n فردي odd
$f(2) = 2^2 = 4$	$f(1) = 4 - 1 = 3$
$f(4) = 4^2 = 16$	$f(3) = 4 - 3 = 1$
$f(6) = 6^2 = 36$	$f(5) = 4 - 5 = -1$

$\therefore$ الحدود الستة الأولى $\langle 3, 4, 1, 16, -1, 36 \rangle$ $\therefore$

تكتب على الترتيب

الحد العام للمتتابعة / General Term For Sequence

هو قاعدة عامة يمكن منها تكوين أو إيجاد كل حدود المتتابعة

مثلاً: $f(n) = 2n$ ، $n \in Z^+$ هو الحد العام للمتتابعة التي حدودها هي:

$< 2, 4, 6, 8, \ldots\ldots >$

نرمز للحد العام بالرمز (U_n) فيكون $U_n = f(n)$ بمعنى:

$U_1 = f(1)$ ، $U_2 = f(2)$ ، $U_3 = f(3)$ .. وهكذا

نستخدم الرمز U_n لتعني المتتابعة التي حدها العام (U_n) وتكتب بالشكل

$U_1, U_2, U_3, \ldots, U_n, \ldots$

مثال 1// اكتب الحدود الخمسة الأولى من المتتابعة التي حدها العام $\frac{(-1)^n}{n}$ حيث $n \in Z^+$.

الحل// الحد الأول $U_1 = \frac{(-1)^1}{1} = -1$ ، الحد الثاني $U_2 = \frac{(-1)^2}{2} = \frac{1}{2}$

الحد الثالث $U_3 = \frac{(-1)^3}{3} = \frac{-1}{3}$ ، الحد الرابع $U_4 = \frac{(-1)^4}{4} = \frac{1}{4}$

الحد الخامس $U_5 = \frac{(-1)^5}{5} = \frac{-1}{5}$

$\therefore$ المتتابعة $< -1, \frac{1}{2}, \frac{-1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{-1}{5}, \ldots >$

مثال 2// اكتب الحدود الستة الأولى للمتتابعة التي حدها العام:

$$U_n = \begin{cases} 2 & n \text{ فردي} \\ \frac{-n}{4} & n \text{ زوجي} \end{cases}$$

الحل/ الحدود الفردية $U_1 = 2$ ، $U_3 = 2$ ، $U_5 = 2$

الحدود الزوجية $U_2 = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$ ، $U_4 = \frac{-4}{4} = -1$ ، $U_6 = \frac{-6}{4} = \frac{-3}{2}$

$\therefore$ المتتابعة $< 2, -\frac{1}{2}, 2, -1, 2, \frac{-3}{2}, \ldots >$

مثال 3// اكتب المتتابعة U_n حيث:

$$U_n = \begin{cases} \frac{1}{n^2} & n \leq 5 \text{ فردي} \\ n+1 & n \leq 6 \text{ زوجي} \end{cases}$$

الحل/ $U_1 = \frac{1}{1^2} = 1$ ، $U_3 = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$ ، $U_5 = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$

$U_2 = 2+1 = 3$ ، $U_4 = 4+1 = 5$ ، $U_6 = 6+1 = 7$

المتتابعة $< 1 , 3 , \frac{1}{9} , 5 , \frac{1}{25} , 7 , \ldots >$:.

مثال 4/ اكتب الثلاثة حدود الاولى من المتتابعة التي حدها العام $U_n = 3$

الحل/ $< 3, 3, 3, \ldots >$

ملاحظات:

1- المتتابعة التي حدودها متساوية تسمى (المتتابعة الثابتة)

2- ترتيب الحدود يعد خاصية مميزة للمتتابعة ولذلك فان المتتابعتين:

$\langle H_n \rangle = \langle 3, 7, 2, 9, 4 \rangle$ ، $\langle F_n \rangle = \langle 3, 2, 7, 9, 4 \rangle$

مختلفتان لان $H_2 = 7$ بينما $F_2 = 2$

$H_3 = 2$ بينما $F_3 = 7$

3- قد لا تكون لبعض المتتابعات قاعدة لحدها العام فمثلاً:

المتتابعة $< 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \ldots >$

ليس لحدها العام قاعدة معينة حيث لا يمكن ايجاد صورة عامة يمكن بواسطتها ايجاد كل حدود هذه المتتابعة.

تمارين (1 - 2)

1) أي العبارات التالية صحيحة وايها خاطئة:

أ) كل دالة مجالها Z^+ هي متتابعة. (صحيحة)

ب) كل دالة مجالها Z^+ هي متتابعة (خاطئة)

ج) كل دالة مجالها $\{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ هي متتابعة (خاطئة)

د) كل دالة مجالها Z هي متتابعة (خاطئة)

هـ) كل دالة مجالها $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ هي متتابعة منتهية (صحيحة)

و) كل دالة مجالها $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ هي متتابعة (صحيحة)

ز) الحد الرابع في المتتابعة $< \frac{\sqrt{n}}{n+1} >$ يساوي $\frac{2}{5}$ (صحيحة)

لان: $U_4 = \frac{2}{5} = \frac{\sqrt{4}}{4+1}$

ح) مجال المتتابعة $< 2, 4, 6, \ldots\ldots, 96 >$ هي Z^+ (خاطئة)

لان الحد العام $<2n>$ مجالها $\{1, 2, 3, 4, \ldots, 48\}$ جزئية من Z^+

ط) في المتتابعة $<U_n>$ حيث $U_{n+1} = n U_n$ فان الحدان الاول والثاني تختلفان عندما $n = 1$ (خاطئة) لان $U_{1+1} = 1 U_1$

$\therefore U_2 = U_1$ اي الحد الاول والثاني متساويان

ي) في المتتابعة $<n^2>$ يكون $U_{n+1} < U_n$ (تحل لمعرفة صحتها)

$$U_{n+1} - U_n = (n+1)^2 - n^2$$

$$= n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1 > 0$$

$\therefore U_{n+1} - U_n > 0 \Rightarrow U_{n+1} > U_n$ فالعبارة (خاطئة)

---

2) أكتب كلاً من المتتابعات الآتية مكتفياً بذكر الحدود الستة الأولى:

a) $U_n = n^2 - 2n$

$U_1 = (1)^2 - 2(1) = -1$ ، $U_2 = (2)^2 - 2(2) = 0$

$U_3 = (3)^2 - 2(3) = 3$ ، $U_4 = (4)^2 - 2(4) = 8$

$U_5 = (5)^2 - 2(5) = 15$ ، $U_6 = (6)^2 - 2(6) = 24$

المتتابعة $\therefore <-1, 0, 3, 8, 15, 24, \ldots>$

---

b) $U_n = 2$

الحل/ $U_1 = 2, U_2 = 2, U_3 = 2, U_4 = 2, U_5 = 2, U_6 = 2$

المتتابعة $\therefore <2, 2, 2, 2, 2, 2, \ldots>$

---

c) $U_n = \frac{6}{n}$

الحل/ $U_1 = \frac{6}{1} = 6$ ، $U_2 = \frac{6}{2} = 3$ ، $U_3 = \frac{6}{3} = 2$

$U_4 = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ ، $U_5 = \frac{6}{5}$ ، $U_6 = \frac{6}{6} = 1$

المتتابعة $\therefore <6, 3, 2, \frac{3}{2}, \frac{6}{5}, 1, \ldots>$

---

d) $U_{n+1} = \frac{4}{1 + U_n}$ ، $U_1 = 1$

الحل/

$n = 1 \Rightarrow U_{1+1} = \frac{4}{1 + U_1} \Rightarrow U_2 = \frac{4}{1+1} = 2$ الحد الثاني

$n = 2 \Rightarrow U_{2+1} = \frac{4}{1 + U_2} \Rightarrow U_3 = \frac{4}{1+2} = \frac{4}{3}$ الحد الثالث

الحد الرابع

$$n=3 \Rightarrow U_{3+1} = \frac{4}{1+U_3} = \frac{4}{1+\frac{4}{3}} = \frac{4}{\frac{7}{3}} = \frac{12}{7}$$

الحد الخامس

$$n=4 \Rightarrow U_{4+1} = \frac{4}{1+U_4} = \frac{4}{1+\frac{12}{7}} = \frac{4}{\frac{19}{7}} = \frac{28}{19}$$

$$n=5 \Rightarrow U_{5+1} = \frac{4}{1+U_5} = \frac{4}{1+\frac{28}{19}} = \frac{4}{\frac{47}{19}} = \frac{76}{47}$$

المتتابعة $\therefore \langle 1, 2, \frac{4}{3}, \frac{12}{7}, \frac{28}{19}, \frac{76}{47}, \ldots \rangle$

---

e) $U_n = 1 - \frac{2}{n}$

الحل/

$$U_1 = 1 - \frac{2}{1} = 1-2 = -1 , \quad U_2 = 1 - \frac{2}{2} = 0$$

$$U_3 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} , \quad U_4 = 1 - \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$U_5 = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5} , \quad U_6 = 1 - \frac{2}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

المتتابعة $\therefore \langle -1, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \ldots \rangle$

---

f) $U_n = (-1)^n$

الحل/

$$U_1 = (-1)^1 = -1 , \quad U_2 = (-1)^2 = 1 , \quad U_3 = (-1)^3 = -1$$

$$U_4 = (-1)^4 = 1 , \quad U_5 = (-1)^5 = -1 , \quad U_6 = (-1)^6 = 1$$

المتتابعة $\therefore \langle -1, 1, -1, 1, -1, 1, \ldots \rangle$

---

g) $U_n = 2^{n-1}$

الحل/

$$U_1 = 2^{1-1} = 2^0 = 1 , \quad U_2 = 2^{2-1} = 2 , \quad U_3 = 2^{3-1} = 4$$

$$U_4 = 2^{4-1} = 2^3 = 8 , \quad U_5 = 2^{5-1} = 16 , \quad U_6 = 2^{6-1} = 32$$

المتتابعة $\therefore \langle 1, 2, 4, 8, 16, 32, \ldots \rangle$

---

h) $U_n = \begin{cases} 1 & n \text{ فردية} \\ 2 & n \text{ زوجية} \end{cases}$

الحل/ المتتابعة $\langle 1, 2, 1, 2, 1, 2, \ldots \rangle$

3) في المتتابعة $<U_n>$ حيث $U_n = n^2 + 2n$ أثبت أن $U_{n+1} > U_n$

الحل/ لكي نثبت $U_{n+1} > U_n$ يجب ان نبرهن ان $U_{n+1} - U_n > 0$

$$\therefore U_{n+1} - U_n = [(n+1)^2 + 2(n+1)] - (n^2 + 2n)$$
$$= n^2 + 2n + 1 + 2n + 2 - n^2 - 2n = 2n + 3 > 0$$
$$\therefore U_{n+1} - U_n > 0 \Rightarrow U_{n+1} > U_n$$

4) اكتب ثمانية حدود من المتتابعة بفرض:

$$U_n: Z^+ \to R \quad , \quad U_n = \begin{cases} n+2 & \ldots n \text{ فردي} \\ 4/n & \ldots n \text{ زوجي} \end{cases}$$

الحل/

الحدود الفردية	الحدود الزوجية
$U_1 = 1 + 2 = 3$	$U_2 = 4/2 = 2$
$U_3 = 3 + 2 = 5$	$U_4 = 4/4 = 1$
$U_5 = 5 + 2 = 7$	$U_6 = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$
$U_7 = 7 + 2 = 9$	$U_8 = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

المتتابعة $\therefore < 3, 2, 5, 1, 7, \frac{2}{3}, 9, \frac{1}{2}, \ldots >$

المتتابعة الحسابية : Arithmetic Sequence

تسمى المتتابعة حسابية اذا كان ناتج طرح كل حد من الحد الذي يليه مباشرة يساوي عدداً ثابتاً ويسمى اساس المتتابعة الحسابية ويرمز له بالرمز (d) فان: $d = U_{n+1} - U_n$

كذلك فانه يكفي لتعيين المتتابعة الحسابية معرفة حدها الاول ويرمز له (a) واساسها (d) حيث يضاف للحد الاول الاساس (d) فنحصل على الحد الثاني وباضافة الاساس (d) الى الحد الثاني نحصل على الحد الثالث وهكذا..

مثال: اذا كانت متتابعة حسابية حدها الاول = 4 واساسها 3 ما هي المتتابعة.

الحل/ المتتابعة هي:

$$< 4, 4+3, 4+3+3, \ldots >$$

أي

$$< 4, 7, 10, 13, \ldots >$$

$\therefore$ المتتابعة الحسابية حدها الاول a واساسها d هي:

$$< a, a+d, a+2d, a+3d, a+4d, \ldots >$$

اما اذا كان الاساس $d=0$ فان المتتابعة: $\langle a, a, a, a, \ldots \rangle$ وتسمى المتتابعة ثابتة.

الحد العام للمتتابعة الحسابية :- General Term for Arithemetic sequence.

$U_n = a + (n-1)d$ الحد العام ، $n > 0$ ، $n \in N$

حيث a الحد الاول ، d الاساس ، n رتبة الحد.

مثال 1/ اكتب المتتابعة الحسابية التي حدها الاول = 7 واساسها = −3 مكتفياً بالحدود الستة الاولى منها.

الحل/ $U_1 = 7$ ، $U_2 = 7 + (-3) = 4$ ، $U_3 = 4 + (-3) = 1, \ldots$

$U_4 = 1 + (-3) = -2$ ، $U_5 = -2 + (-3) = -5$ ، $U_6 = -5 + (-3) = -8$

∴ المتتابعة $\langle 7, 4, 1, -2, -5, -8, \ldots \rangle$

مثال 2/ اوجد الحد العاشر من المتتابعة الحسابية $\langle 4, 9, 14, \ldots \rangle$

الحل/

$a = 4$ الحد الاول

$d = 9 - 4 = 5$ الاساس ، $n = 10$ ، $U_{10} = ?$

$U_n = a + (n-1)d \Rightarrow U_{10} = 4 + (10-1) \times 5 = 49$ الحد العاشر

مثال 3/ اكتب المتتابعة الحسابية التي حدها السابع = 36 ، واساسها = 4

الحل/ بما ان $U_7 = 36$ فان:

$U_7 = a + 6d$

$\therefore 36 = a + 6 \times 4 \Rightarrow 36 - 24 = a$

$\therefore a = 12$ الحد الاول

∴ المتتابعة $\langle 12, 16, 20, 24, 28, \ldots \rangle$

مثال 4/ متتابعة حسابية حدها الثالث = 9 ، وحدها السابع = −3 أوجد حدود المتتابعة بين U_3 ، U_7 ؟

الحل/ بما ان $U_3 = 9$ فان:

$U_3 = a + 2d$

$\therefore 9 = a + 2d \quad \ldots\ldots (1)$

بما ان $U_7 = -3$ فان:

$U_7 = a + 6d$

$\therefore -3 = a + 6d \quad \ldots\ldots (2)$

وبطرح (1) من (2) ينتج

$4d = -12 \Rightarrow d = -3$

نعوض $d=-3$ في المعادلة ① ينتج $a+2(-3)=9 \Rightarrow a=15$

$\therefore\ U_4=a+3d=15+3(-3)=6$

$U_5=a+4d=15+4(-3)=3$

$U_6=a+5d=15+5(-3)=0$

مثال 5/ أوجد الحد الذي ترتيبه 200 في المتتابعة الحسابية التي حدها الخامس يساوي (-4) وأساسها = 12

الحل/ $U_n=a+(n-1)d \Rightarrow U_{200}=a+199d$

نجد (a) من الحد الخامس حيث: $U_5=a+4d$

$\therefore\ -4=a+4\times 12 \Rightarrow a=-52$

$\therefore\ U_{200}=-52+199(12)=2336$

مثال 6/ أوجد عدد حدود المتتابعة الحسابية $\langle -7,-4,-1,\dots,113\rangle$

الحل/ $a=-7\ ,\ d=-4-(-7)=3\ ,\ U_n=113$

$\therefore\ U_n=a+(n-1)d \Rightarrow 113=-7+(n-1)\times 3 \Rightarrow$

$120=3(n-1) \Rightarrow n=41$ عدد حدود المتتابعة

الأوساط الحسابية: الوسط الحسابي c بين عددين a,b هو:

$$c=\frac{a+b}{2}$$

لكن اذا أدخلنا عدة أوساط حسابية بين عددين فان:

عدد الحدود = عدد الأوساط + 2 حيث يعتبر حدها الأول هو a والحد الأخير نعتبره U_n وهو العدد الثاني نجد من العلاقة:

$U_n=a+(n-1)d$ نجد منه الأساس d فنضيف d على a فنحصل على الوسط الأول ونضاف له d أيضاً نحصل على الوسط الثاني وهكذا.

مثال/ أدخل 6 أوساط حسابية بين العددين 38 , 10

الحل/ عدد الحدود = 6 + 2 = 8 والحد الأول $a=10$

والحد الثامن U_8 هو العدد 38 .

الأساس $U_8=a+7d \Rightarrow 38=10+7d \Rightarrow 7d=28 \Rightarrow d=4$

$\therefore$ المتتابعة $\langle 10, [14, 18, 22, 26, 30, 34], 38\rangle$

الأوساط الحسابية

مجموع المتتابعة الحسابية: Sum of an Arithmetic Sequence

اذا كانت (U_n) متتابعة حسابية فان مجموع (n) حداً الاولى منها نجده من العلاقة التالية:

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

ملاحظة // اذا علم الحد الاول والأخير ويطلب ايجاد مجموع (n) من حدود المتتابعة الحسابية فالحد الأخير U_n يصبح القانون

$$S_n = \frac{n}{2}[a + U_n]$$

مثال ١/ اوجد مجموع 4 حدود من المتتابعة الحسابية التي حدها الاول = 2 وحدها الرابع = 5 .

الحل/

$a = 2 \quad , U_4 = 5 \quad , n = 4 \quad , S_4 = ?$

$$S_n = \frac{n}{2}[a + U_n] \Rightarrow S_4 = \frac{4}{2}[2 + 5] = 14$$

مثال ٢/ أوجد مجموع حدود المتتابعة الحسابية $\langle 1, 2, 3, \ldots, 100 \rangle$

الحل/

$a = 1 \quad , U_n = 100 \quad , n = 100$

$$\therefore S_n = \frac{n}{2}[a + U_n] \Rightarrow S_{100} = \frac{100}{2}[1 + 100] = 5050$$

مثال ٣/ متتابعة حسابية حدها الثاني = 4 وحدها ما قبل الأخير = 22 وعدد حدودها = 12 جد مجموعها.

الحل/ الحد الاول + الحد الأخير = الحد الثاني + الحد ما قبل الأخير

$$\therefore a + U_n = 4 + 22 = 26$$

$$S_n = \frac{n}{2}[a + U_n]$$

$$S_{12} = \frac{12}{2} \times 26 = 12 \times 13 = 156$$

مثال ٤/ جد مجموع ثمان حدود من المتتابعة الحسابية $\langle -4, 1, 6, \ldots \rangle$

الحل/

$a = -4 \quad , d = 1 - (-4) = 5 \quad n = 8$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

$$S_8 = \frac{8}{2}[2 \times (-4) + (8-1) \times 5]$$

$$= 4(-8 + 35) = 4 \times 27 = 108$$

مثال 5/ ثلاث اعداد تكون متتابعة حسابية مجموعها = 15 ومجموع مربعاتها = 83 فما هي الاعداد ؟

الحل/ نفرض الاعداد $a-d$ ، a ، $a+d$

$$\therefore a-d+a+a+d=15 \Rightarrow 3a=15$$

الاعداد $\therefore a=5 \Rightarrow 5-d, 5, 5+d$

مجموع مربعاتها $(5-d)^2+5^2+(5+d)^2=83$

$$25-10d+d^2+25+25+10d+d^2=83 \Rightarrow$$

$$2d^2+75=83 \Rightarrow 2d^2=8 \Rightarrow d^2=4 \Rightarrow d=\mp 2$$

عندما $d=2$ فالاعداد هي: $3, 5, 7$

عندما $d=-2$ فالاعداد هي: $7, 5, 3$

من خواص المتتابعة الحسابية :

1) اذا أضيفت أو طرحت كمية ثابتة الى كل من حدود المتتابعة الحسابية كانت الكميات الناتجة تكون متتابعة حسابية أساسها نفس اساس المتتابعة الاصلية .

2) اذا ضرب كل حد من حدود متتابعة حسابية في مقدار ثابت أو قسم على مقدار كونت الكميات الناتجة متتابعة حسابية اساسها يختلف عن اساس المتتابعة الاصلية .

3) حاصل جمع او طرح متتابعتين حسابيتين يكون متتابعة حسابية اساسها هو المجموع او الفرق بين أساسي المتتابعتين .

تمارين (2 - 2)

① لكل فقرة أربع إجابات واحدة منها فقط صحيحة ، إختر الإجابة الصحيحة :

أولاً : المتتابعة $<2n+1>$ ⇐ $<3, 5, 7, 9, 11, 13, \ldots>$

أ) أساسها = 2 حدها العاشر = 13

ب) أساسها = 1 حدها العاشر = 21

جـ) أساسها = 2 حدها العاشر = 21

د) أساسها = 2 حدها العاشر = 19

$U_{10} = 2\times10+1 = 21 \ , \ d = 5-3 = 2$

∴ الإجابة (جـ)

ثانياً : اذا كان $<8, x, 2, -1, \ldots>$ متتابعة حسابية فأن $x = \ldots$

أ) 7 ب) 3 جـ) 5 د) 11

الجواب جـ لأن

$x-8 = 2-x \Rightarrow 2x = 10 \Rightarrow x = 5$

ثالثاً : اذا كان $<-3, x, 11>$ متتابعة حسابية فأن : $x = \ldots$

أ) 7 ب) 4 جـ) 8 د) 14

الجواب ب لأن

$x = \frac{-3+11}{2} = 4$

رابعاً : في المتتابعة الحسابية $<3, 7, 11, \ldots, x, 63>$ فأن $x = \ldots$

أ) 15 ب) 33 جـ) 59 د) ليس أي مما سبق

الجواب جـ لأن

$3+63 = 7+x \Rightarrow x = 66-7 = 59$

---

② أكتب الحدود الخمسة الأولى لكل من المتتابعات الحسابية التي فيها :

أولاً : $a = -5 \ , \ d = 3$

الحل / المتتابعة $<-5, -2, 1, 4, 7, \ldots>$

ثانياً : $a = -20 \ , \ d = -4$

الحل / المتتابعة $<-20, -24, -28, -32, -36, \ldots>$

ثالثاً : $a = -3 \ , \ U_{n+1} = U_n + 4$

الحل / الأساس $U_{n+1} = U_n + 4 \Rightarrow U_{n+1} - U_n = 4 \Rightarrow d = 4$

$\therefore U_1 = a = -3 \quad , U_2 = -3+4 = 1 \quad , U_3 = 1+4 = 5$

$U_4 = 5+4 = 9 \quad , U_5 = 9+4 = 13$

$\therefore \langle -3, 1, 5, 9, 13, \ldots \rangle$ المتتابعة

رابعاً : $U_n = (5n-9)$

الحل

$U_1 = 5\times1 - 9 = -4 \quad , U_2 = 5\times2 - 9 = 1$

$U_3 = 5\times3 - 9 = 6 \quad , U_4 = 5\times4 - 9 = 11 \quad , U_5 = 5\times5 - 9 = 16$

$\therefore \langle -4, 1, 6, 11, 16, \ldots \rangle$ المتتابعة

---

③ جد الحد السابع عشر من المتتابعة الحسابية $\langle -15, -12, -9, \ldots \rangle$

الحل/ $a = -15$ الحد الأول , $d = -12 - (-15) = 3$ الأساس

$\therefore U_n = a + (n-1)d$

$U_{17} = -15 + (17-1)\times 3 = -15 + 16\times3 = 33$ الحد السابع عشر

---

④ جد عدد حدود المتتابعة الحسابية $\langle -20, -17, -14, \ldots, 55 \rangle$

الحل/ $a = -20$ الحد الأول , $d = -17 - (-20) = -17 + 20 = 3$

$U_n = 55$ الحد الأخير , $n = ?$ عدد الحدود

$U_n = a + (n-1)d$ قانون الحد العام

$55 = -20 + (n-1)\times 3 \Rightarrow 55 + 20 = (n-1)\times 3$

$\therefore n - 1 = \frac{75}{3} \Rightarrow n - 1 = 25 \Rightarrow n = 25 + 1 = 26$ عدد الحدود

---

⑤ متتابعة حسابية $\langle x^2+1, 2x^2+1, 2x^2+x+3, \ldots \rangle$

جد قيمة x ؟ وما حدها السابع ؟

الحل/ $d = U_2 - U_1 = U_3 - U_2$

$\therefore (2x^2+1) - (x^2+1) = (2x^2+x+3) - (2x^2+1)$

$2x^2 + 1 - x^2 - 1 = 2x^2 + x + 3 - 2x^2 - 1$ تحليل بالتجربة

$2x^2 - x^2 = x + 2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow (x-2)(x+1) = 0$

either $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow \langle 2^2+1, 2(2)^2+1, 2(2)^2+2+3, \ldots \rangle$

$\therefore \langle 5, 9, 13, \ldots \rangle$ المتتابعة

or $x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow \langle (-1)^2+1, 2(-1)^2+1, 2(-1)^2+(-1)+3, \ldots \rangle$

المتتابعة $\therefore \langle 2, 3, 4, \ldots \rangle$

عند الحالة الاولى $x = 2$ فان $a = 5, \ d = 4$

الحد السابع $\therefore U_7 = a + 6d = 5 + 6 \times 4 = 29$

والحالة الثانية $x = -1$ فان $a = 2, \ d = 1$

الحد السابع $\therefore U_7 = 2 + 6 \times 1 = 8$

---

⑥ اذا أدخلنا ستة أوساط حسابية بين 2, 30 فما هذه الاوساط ؟

الحل/ عدد الحدود = عدد الاوساط + 2 = 6 + 2 = 8 حداً

اذا كان الحد الاول = 2 والحد الثامن = 30 فان :

$a = 2, \quad U_8 = 30 \Rightarrow U_8 = a + 7d$

$\therefore 30 = 2 + 7d \Rightarrow 7d = 28 \Rightarrow d = 4$

المتتابعة $\therefore \langle 2, [6, 10, 14, 18, 22, 26], 30 \rangle$

الاوساط الحسابية

واذا أخذنا الحد الاول = 30 والحد الثامن = 2 فانه :

$a = 30, \quad U_8 = 2 \Rightarrow U_8 = a + 7d$

$\therefore 2 = 30 + 7d \Rightarrow d = -4$

المتتابعة $\therefore \langle 30, [26, 22, 18, 14, 10, 6], 2 \rangle$

الاوساط الحسابية

---

⑦ جد المتتابعة الحسابية التي حدها الخامس = 8 وحدها الثامن عشر = 31-

الحل/

$U_5 = a + 4d \Rightarrow 8 = a + 4d \ldots ①$

$U_{18} = a + 17d \Rightarrow \pm 31 = \mp a \mp 17d \ldots ②$

بطرح ② من ① نحصل

$39 = -13d$

الاساس $\therefore d = \frac{39}{-13} = -3$

ثم نعوض الاساس $d = -3$ في المعادلة ① لنجد الحد الاول a.

الحد الاول $\therefore 8 = a + 4 \times (-3) \Rightarrow 8 = a - 12 \Rightarrow a = 20$

المتتابعة $\therefore \langle 20, 17, 14, 11, 8, \ldots \rangle$

---

⑧ اي حد في المتتابعة الحسابية $\langle -9, -5, -1, \ldots \rangle$ يكون مساوياً 87 ، هل يوجد حد في هذه المتتابعة = 333 ؟

الحل/ بالاساس $a = -9$, $d = -5-(-9) = 4$

$U_n = 87$, $n = ?$

$U_n = a + (n-1)d \Rightarrow 87 = -9 + (n-1)\times 4$

$\therefore 87 + 9 = (n-1)\times 4 \Rightarrow n-1 = \frac{96}{4} \Rightarrow n-1 = 24 \Rightarrow n = 25$

$\therefore$ رتبة الحد الذي = 87 هي 25 .

• الآن نبحث عن حد = 333 ملاحظة : n (رتبة الحد يجب ان يكون عدد صحيح+)

نعوض في الحد العام $333 = -9 + (n-1)\times 4$

$\therefore 4(n-1) = 333 + 9 \Rightarrow 4(n-1) = 342$

$\therefore n-1 = \frac{342}{4} \Rightarrow n = 85.5 + 1 = 86.5 \notin Z^+$

$\therefore$ لا يوجد حد في هذه المتتابعة قيمته = 333

---

(9) متتابعة حسابية حدها الرابع = -1 وحاصل ضرب حديها الثاني والثالث = 10 ما حدها العاشر ؟

الحل/

$U_4 = a + 3d \Rightarrow a + 3d = -1$ ---- (1)

$U_2 \times U_3 = (a+d)(a+2d) = 10$ ---- (2)

من المعادلة (1) $a = -1 - 3d$ ونعوض في المعادلة (2)

$(-1-3d+d)(-1-3d+2d) = 10 \Rightarrow (-1-2d)(-1-d) = 10$

تحليل بالتجربة $\therefore 1 + d + 2d + 2d^2 - 10 = 0 \Rightarrow 2d^2 + 3d - 9 = 0$

$(2d-3)(d+3) = 0$

either $2d - 3 = 0 \Rightarrow d = \frac{3}{2}$ الاساس , الحد الاول $\therefore a = -1 - 3\times\frac{3}{2} = \frac{-11}{2}$

or $d + 3 = 0 \Rightarrow d = -3$ الاساس , الحد الاول $\therefore a = -1 - 3(-3) = 8$

$\therefore \langle \frac{-11}{2}, -4, \frac{-5}{2}, \ldots \rangle$ المتتابعة عندما $d = \frac{3}{2}$

or $\langle 8, 5, 2, \ldots \rangle$ المتتابعة عندما $d = -3$

الحد العاشر $U_{10} = a + 9d = \frac{-11}{2} + 9\times\frac{3}{2} = \frac{-11}{2} + \frac{27}{2} = \frac{16}{2} = 8$

الحد العاشر or $U_{10} = 8 + 9(-3) = 8 - 27 = -19$

---

(10) اذا كانت : $\langle A, 7, \ldots, B, 25 \rangle$ متتابعة حسابية , وكانت $B = 5A + 2$ فما قيمة A , B ؟ وما عدد حدود المتتابعة ؟

الحل/ الحد الاول + الحد الاخير = الحد الثاني + الحد ماقبل الاخير

عوضنا عن B $\therefore A + 25 = 7 + B \Rightarrow A + 25 = 7 + 5A + 2$

$A - 5A = 7 + 2 - 25 \Rightarrow -4A = -16 \Rightarrow A = \frac{-16}{-4} = 4$

$\therefore B = 5 \times 4 + 2 = 22$

الآن نجد عدد حدود المتتابعة، والمتتابعة تصبح بعد التعويض عن A، B

$< 4, 7, \ldots\ldots, 22, 25 >$

$\therefore a = 4$ الحد الاول ، $d = 7 - 4 = 3$ الاساس $n = ?$

$U_n = a + (n-1) \times 3 \Rightarrow 25 = 4 + (n-1) \times 3$

$\therefore 3(n-1) = 25 - 4 \Rightarrow n - 1 = \frac{21}{3} \Rightarrow n - 1 = 7$

$\therefore n = 7 + 1 = 8$ عدد حدود المتتابعة

---

(11) أثبت أن مجموع n حداً الاولى من الاعداد الفردية الموجبة: $<1, 3, 5, \ldots, (2n-1) \ldots>$ هو n^2.

الحل/

$a = 1 \quad , d = 2$

$S_n = \frac{n}{2} [2a + (n-1) d]$ قانون المجموع

$= \frac{n}{2} [2 \times 1 + (n-1) \times 2]$

$= \frac{n}{2} [2 + 2n - 2] = \frac{n}{2} \times 2n = n^2$

---

(12) جد مجموع المتتابعة الحسابية $<2, 5, 8, \ldots, 29>$

الحل/

$a = 2 \quad , d = 3 \quad , U_n = 29 \quad , n = ?$

$U_n = a + (n-1) d \Rightarrow 29 = 2 + (n-1) \times 3$

$\therefore 3(n-1) = 29 - 2 \Rightarrow n - 1 = \frac{27}{3} \Rightarrow n - 1 = 9$

$\Rightarrow n = 9 + 1 = 10$ عدد الحدود

$S_n = \frac{n}{2} [a + U_n] \Rightarrow S_{10} = \frac{10}{2} [2 + 29]$

$= 5 \times 31 = 155$ مجموع الحدود

---

(13) كم حداً يؤخذ من المتتابعة الحسابية $<25, 21, 17, \ldots\ldots>$ ابتداءً من حدها الاول ليكون مجموعها $= -14$ ؟

الحل/

$a = 25 \quad , d = 21 - 25 = -4 \quad S_n = -14$

$S_n = \frac{n}{2} [2a + (n-1) d]$ قانون المجموع

$-14 = \frac{n}{2} [2 \times 25 + (n-1) \times (-4)]$

$-14 = \frac{n}{2} [50 - 4n + 4]$

$-28 = 54n - 4n^2 \Rightarrow 4n^2 - 54n - 28 = 0] \div 2$

$2n^2 - 27n - 14 = 0 \Rightarrow (2n+1)(n-14) = 0$

either $2n+1=0 \Rightarrow n = \frac{-1}{2}$ يهمل $\notin Z^+$

or $n-14=0 \Rightarrow n=14$ عدد الحدود

---

(41) جد مجموع الاعداد الصحيحة المحصورة بين 400 ، 100 وتقبل القسمة على 3 .

الحل/ نقسم 100 على 3 والناتج 33 والباقي 1

$\therefore 33 \times 3 = 99 + 3 = 102$ الحد الأول

كذلك نقسم 400 على 3 فالناتج 133 والباقي 1

$133 \times 3 = 399$ الحد الأخير

$\therefore a = 102$ ، $U_n = 399$ ، $d = 3$ الأساس

$U_n = a + (n-1)d$ نجد عدد الحدود من القانون

$399 = 102 + (n-1) \times 3$

$399 - 102 = 3(n-1) \Rightarrow n-1 = \frac{297}{3} \Rightarrow n-1 = 99$

$\therefore n = 99 + 1 = 100$ عدد الحدود

$S_n = \frac{n}{2}[a + U_n]$

$\therefore S_{100} = \frac{100}{2}[102 + 399] = 50 \times 501 = 25050$

سؤال اثرائي/ اثبت ان مجموع n حداً الأولى من الاعداد الزوجية الموجبة

$\langle 2, 4, 6, \ldots, 2n, \ldots \rangle$ يساوي $n + n^2$.

$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$ ، $d = 4 - 2 = 2$ الأساس

$\therefore S_n = \frac{n}{2}[2 \times 2 + (n-1) \times 2]$

$= \frac{n}{2}[4 + 2n - 2] = \frac{n}{2}[2 + 2n]$

$\therefore S_n = \frac{n}{2} \times 2 + \frac{n}{2} \times 2n$

$= n + n^2$

المتتابعة الهندسية : Geometric Sequence

هي المتتابعة التي فيها ناتج حاصل قسمة كل حد على الذي قبله عدد ثابت وهذا العدد يسمى (أساس) ونرمز له (r)

$$\therefore r = \frac{U_{n+1}}{U_n}$$ شرط المتتابعة الهندسية

فالمتتابعة (U_n) تسمى هندسية اذا كان : $U_n \neq 0$ (لا يوجد حد = صفراً) كذلك $\frac{U_{n+1}}{U_n} = r$ لكل n تنتمي لمجال المتتابعة وان r عدد حقيقي .

مثال / بين نوع المتتابعات :

a) $\langle 2, 3, 5, 7, 11, \ldots \rangle$
لا تمثل متتابعة هندسية ولا حسابية

b) $\langle 1, 2, 4, 8, \ldots \rangle$
المتتابعة هندسية لان حاصل قسمة كل حد على الذي قبله عدد ثابت = 2

c) $\langle 81, -27, 9, -3, \ldots \rangle$
المتتابعة هندسية لان حاصل قسمة كل حد على الذي قبله عدد ثابت = $-\frac{1}{3}$

d) $\langle 4, 4, 4, 4, \ldots \rangle$
المتتابعة حسابية اذا كان اساسها = 0
والمتتابعة هندسية اذا كان اساسها = 1 وتسمى المتتابعة ثابتة .

e) $\langle 7, 11, 15, 19, \ldots \rangle$
المتتابعة حسابية لان الفرق بين كل حد والذي قبله عدد ثابت = 4

ملاحظات مهمة:

① اذا كان (a) الحد الاول موجب وان
- ← r>1 (موجب) متتابعة هندسية تزايدية
- ← r=1 متتابعة هندسية ثابتة
- ← r<1 متتابعة هندسية تناقصية
- ← r<1 (سالب) متتابعة هندسية بالاشارات فيها تأخذ حالة التناوب الاول موجب والثاني سالب وهكذا

② اذا كان (a) الحد الاول سالب وان
- ← r>1 (موجب) هندسية تناقصية
- ← r=1 هندسية ثابتة
- ← r<1 هندسية تزايدية
- ← r<1 (سالب) متناوبة بالاشارات - , +

مثال/ $a = 4$ ، $r = \frac{1}{2}$ فإن $\langle 4, 2, 1, \frac{1}{2}, \ldots \rangle$ هندسية تنازلية

، $r = 1$ فإن $\langle 4, 4, 4, 4, \ldots \rangle$ " ثابتة

، $r = 2$ فإن $\langle 4, 8, 16, 32, \ldots \rangle$ " تصاعدية

، $r = -\frac{1}{2}$ فإن $\langle 4, -2, 1, -\frac{1}{2}, \ldots \rangle$ " متناوبة الاشارة + -

ثم

$a = -4$ ، $r = \frac{1}{2}$ فإن $\langle -4, -2, -1, -\frac{1}{2}, \ldots \rangle$ هندسية تصاعدية

، $r = 1$ فإن $\langle -4, -4, -4, \ldots \rangle$ هندسية ثابتة

، $r = 2$ فإن $\langle -4, -8, -16, \ldots \rangle$ هندسية تنازلية

، $r = -\frac{1}{2}$ فإن $\langle -4, 2, -1, \frac{1}{2}, \ldots \rangle$ متناوبة الاشارة - ثم +

3) اذا علم الحد الاول للمتتابعة الهندسية $= a$ ، وأساسها $= r$ فيكون :

$U_1 = a$ الحد الاول ، $U_2 = ar$ الحد الثاني ، $U_3 = ar^2$ الحد الثالث

$U_n = ar^{n-1}$ الحد النوني

الحد العام للمتتابعة الهندسية General Term Gometric Sequence

ليكن الحد الاول $= a$ والاساس $= r$ فالحد العام U_n هو :

$$\boxed{U_n = ar^{n-1}}$$ قانون الحد العام للمتتابعة الهندسية

مثال 1/ اكتب الحدود الستة الاولى من المتتابعة الهندسية التي حدها الاول $= 64$ واساسها $= -\frac{1}{2}$

الحل/ $U_1 = 64$ ، $U_2 = 64 \times (-\frac{1}{2}) = -32$ ، $U_3 = -32 \times (-\frac{1}{2}) = 16$

$U_4 = 16 \times (-\frac{1}{2}) = -8$, $U_5 = -8 \times (-\frac{1}{2}) = 4$, $U_6 = 4 \times (-\frac{1}{2}) = -2$

$\therefore \langle 64, -32, 16, -8, 4, -2, \ldots \rangle$ المتتابعة الهندسية

مثال 2/ جد الحد السابع من متتابعة هندسية حدها الاول $= -\frac{1}{4}$ واساسها $= 2$

الحل/ $a = -\frac{1}{4}$ الحد الاول ، $r = 2$

$U_n = ar^{n-1} \Rightarrow U_7 = (-\frac{1}{4}) \times 2^{7-1} = -\frac{1}{4} \times 64$

$\therefore U_7 = -16$ الحد السابع

مثال 3/ متتابعة هندسية حدها الاول = 3 وحدها الخامس = 48 . جد حدها الثامن .

الحل/

$u_1 = 3 \Rightarrow a = 3$

$u_5 = ar^4 \Rightarrow 48 = 3r^4$

$\therefore r^4 = \frac{48}{3} = 16 \Rightarrow r = \mp 2$

عندما $r = 2$ فان :

$u_8 = ar^7$

$= 3 \times 2^7 = 3 \times 128 = 384$

عندما $r = -2$ فان $u_8 = 3 \times (-2)^7 = 3 \times (-128) = -384$

مثال 4/ مجموع الحدود الثلاثة الاولى من متتابعة هندسية حدودها موجبة = 7 وحدها الثالث = 1 ما حدها السادس ؟

الحل/

$u_1 + u_2 + u_3 = 7$

$a + ar + ar^2 = 7$

$\therefore a(1 + r + r^2) = 7 \; \cdots\cdots (1)$

الحد الثالث $u_3 = ar^2 \Rightarrow ar^2 = 1$

$\therefore a = \frac{1}{r^2} \; \cdots\cdots (2)$

وبتعويض (2) في (1) نحصل على

$\frac{1}{r^2}(1 + r + r^2) = 7 \Rightarrow 1 + r + r^2 = 7r^2$

$\therefore 6r^2 - r - 1 = 0 \Rightarrow (3r + 1)(2r - 1) = 0$

either $3r + 1 = 0 \Rightarrow r = -\frac{1}{3}$ يهمل (حدود المتتابعة موجبة)

or $2r - 1 = 0 \Rightarrow r = \frac{1}{2}$ الاساس

$\therefore a = \frac{1}{(\frac{1}{2})^2} = 4$ الحد الاول

الحد السادس $u_6 = ar^5 = 4\left(\frac{1}{2}\right)^5 = 4 \times \frac{1}{32} = \frac{1}{8}$

الاوساط الهندسية :

اذا أدخلنا عدة اوساط هندسية بين العددين x, y فان العدد الاول x = الحد الاول والعدد الثاني y = الحد الاخير فان عدد الحدود = عدد الاوساط + 2 ونطبق قانون الحد العام $u_n = ar^{n-1}$ فنجد الاساس r ثم نجد الاوساط الهندسية

نضرب العدد الاول في الاساس فنحصل على الوسط الهندسي الاول ثم نضرب الوسط الاول × الاساس فنحصل على الوسط الثاني ثم نضرب الوسط الثاني × الاساس فنحصل على الوسط الثالث وهكذا . . .

مثال / أدخل أربعة أوساط هندسية بين العددين 4 ، 128 .

الحل / عدد الحدود = عدد الاوساط + 2 = 4 + 2 = 6 حدود

$a=128 \quad , n=6 \quad , U_6=4$

$\therefore U_6 = ar^5 \Rightarrow 4 = 128 r^5 \Rightarrow r^5 = \frac{4}{128} = \frac{1}{32} = \left(\frac{1}{2}\right)^5$

$\therefore r = \frac{1}{2}$ الاساس

$\therefore \langle 128, [64, 32, 16, 8], 4 \rangle$

الاوساط الهندسية

Sum of a Geometric Sequence مجموع المتتابعة الهندسية

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

$r \neq 1$ ، a = الحد الاول ، r = الاساس

S_n مجموع المتتابعة

اذا كان الاساس = 1 فان المتتابعة $\langle a, a, a, a, \ldots \rangle$ مجموعها (n حداً)

$\therefore S_n = na$

مثال 1/ جد مجموع الستة حدود الاولى من المتتابعة الهندسية :

$\langle 64, 32, 16, \ldots \rangle$

الحل/

$a = 64 \quad , \quad r = \frac{32}{64} = \frac{1}{2} \quad n = 6$

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} \Rightarrow S_6 = \frac{64(1-(\frac{1}{2})^6)}{1-\frac{1}{2}} = \frac{64(1-\frac{1}{64})}{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{64\left(\frac{64-1}{64}\right)}{\frac{1}{2}} = \frac{63}{\frac{1}{2}} = 63 \times \frac{2}{1} = 126$$

$\therefore S = 126$

قانون مجموع المتتابعة الهندسية اللانهائية:

$$S_\infty = \frac{a}{1-r}$$

يصلح هذا القانون فقط عندما

$-1 < r < 1$ ولا يصلح عندما $r \geq 1$ أو $r \leq -1$

مثال 2/ جد ناتج $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots\dots\infty$

الحل/ هذه متتابعة هندسية لانهائية نسبة الأساس $= \frac{1}{2}$

ففي هذه الحالة يجوز تطبيق القانون

$$S_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$$

مثال 3/ جد مجموع $0.4+0.04+0.004+\dots\dots\infty$

الحل/ هذه متتابعة هندسية لانهائية بنسبة الأساس $= 0.1$

لأن $a=0.4$ ، $r=\frac{0.04}{0.4}=0.1$

$$S_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{0.4}{1-0.1} = \frac{0.4}{0.9} = \frac{4}{9}$$

مثال 4/ جد ناتج $64-16+4-\dots\dots\infty$

الحل/ متتابعة هندسية لانهائية لأن

$a=64$ ، الأساس $r=\frac{-16}{64}=-\frac{1}{4}$

$$S_\infty = \frac{a}{1-r}$$

$$= \frac{64}{1-(-\frac{1}{4})} = \frac{64}{1+\frac{1}{4}} = \frac{64}{\frac{5}{4}} = \frac{4\times 64}{5}$$

$$\therefore S_\infty = \frac{256}{5}$$

تمارين (3 - 2)

① أي العبارات الآتية صحيحة وأيها خاطئة:

ⓐ اذا كان r أساس المتتابعة الهندسية $\langle U_n \rangle$ فإن $U_5=r^2U_3$

العبارة صحيحة لأن $U_5=r^2U_3 \Rightarrow U_5=r^2\times ar^2=ar^4$

ⓑ أساس المتتابعة الهندسية $\langle \dots,-1,1,-1,1,-1,1 \rangle$ هو (1)

العبارة خاطئة لأن الأساس $r=\frac{-1}{1}=-1$.

ⓒ اذا كانت $\langle 32, b, 2, -\frac{1}{2}, \dots \rangle$ متتابعة هندسية فإن $b=-8$

$\frac{b}{32}=\frac{2}{b} \Rightarrow b^2=64 \Rightarrow b=\mp 8$

العبارة صحيحة $\therefore b=-8$

(د) اذا كان أساس المتتابعة الهندسية موجباً فان جميع حدودها موجبة .
العبارة صحيحة اذا كان الحد الاول موجباً .
العبارة خاطئة اذا كان الحد الاول سالباً .

(هـ) إذا كانت $<4 , x , 16>$ متتابعة هندسية فان $x = -8$

العبارة خاطئة لان:
$\frac{x}{4} = \frac{16}{x} \Rightarrow x^2 = 64 \Rightarrow x = \mp 8$

(و) اذا كانت $<a_1 , a_2 , a_3 , a_4 , \ldots>$ متتابعة هندسية فان:
$\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_3}{a_4}$

العبارة صحيحة لان:
$r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_4}{a_3} \Rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{a_3}{a_4}$

(ز) اذا كان $U_n = 3U_{n+1}$ حدين من حدود متتابعة هندسية فان $r = 3$
العبارة خاطئة لان: الاساس $r = \frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{1}{3}$

---

(2) اكتب الحدود الخمسة الاولى لكل من المتتابعات الهندسية الآتية التي فيها :

(أ) $a = 81 , r = \frac{1}{3}$
الحل/ المتتابعة الهندسية $<81 , 27 , 9 , 3 , 1 , \ldots\ldots>$

(ب) $a = \frac{1}{32} , r = -2$
الحل/ المتتابعة الهندسية $<\frac{1}{32} , -\frac{1}{16} , \frac{1}{8} , -\frac{1}{4} , \frac{1}{2} , \ldots\ldots>$

(جـ) $a = 27 , r = -\frac{2}{3}$
الحل/ المتتابعة الهندسية $<27 , -18 , 12 , -8 , \frac{16}{3} , \ldots\ldots>$

(د) $a = -8 , U_{n+1} = \frac{1}{2} U_n$ بقسمة الطرفين على U_n :
الحل/
$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{\frac{1}{2}U_n}{U_n} \Rightarrow r = \frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{1}{2}$ الاساس

∴ المتتابعة الهندسية $<-8 , -4 , -2 , -1 , -\frac{1}{2} , \ldots\ldots>$

(هـ) $a = 2 , r = 2$
الحل/ $<2 , 4 , 8 , 16 , 32 , \ldots\ldots>$

---

(3) جد الحد الثامن من المتتابعة الهندسية $<2 , 1 , \frac{1}{2} , \ldots\ldots>$

الحل/
$a = 2 \quad , r = \frac{1}{2} \quad n = 8$

$U_n = ar^{n-1} \Rightarrow U_8 = 2 \times (\frac{1}{2})^{8-1} = 2 \times \frac{1}{128} = \frac{1}{64}$ الحد الثامن

④ متتابعة هندسية حدها الرابع = 8− وحدها السابع = 64− ما حدها الأول والأساس ؟

الحل/

$U_4 = ar^3 \Rightarrow ar^3 = -8$ ----①

$U_7 = ar^6 \Rightarrow ar^6 = -64$ ----②

بقسمة ② على ①

$\frac{ar^6}{ar^3} = \frac{-64}{-8} \Rightarrow r^3 = 8 \Rightarrow r = 2$ الأساس

نعوض الأساس في المعادلة ①

$a \times 2^3 = -8 \Rightarrow a = \frac{-8}{8} = -1$ الحد الأول

---

⑤ ادخل 9 أعداد بين العددين 96 ، 3 بحيث تكون مع هذين العددين متتابعة هندسية .

الحل/ عدد الحدود = 9 + 2 = 11 حداً حيث $a = 3$ ، $U_{11} = 96$

$\therefore U_{11} = ar^{10} \Rightarrow 96 = 3r^{10} \Rightarrow r^{10} = \frac{96}{3} = 32 = 2^5$

$\therefore (r^2)^5 = 2^5 \Rightarrow r^2 = 2 \Rightarrow r = \mp\sqrt{2}$

عندما $r = \sqrt{2}$ فان الاوساط هي :

$3\sqrt{2}, 6, 6\sqrt{2}, 12, 12\sqrt{2}, 24, 24\sqrt{2}, 48, 48\sqrt{2},$

عندما $r = -\sqrt{2}$ فان الاوساط هي :

$-3\sqrt{2}, 6, -6\sqrt{2}, 12, -12\sqrt{2}, 24, -24\sqrt{2}, 48, -48\sqrt{2}$

---

⑥ مجموع الحدين الاول والثاني في متتابعة هندسية = 32− ومجموع حديها الرابع والخامس = 4− ما حدها السابع ؟

الحل/

$U_1 + U_2 = -32 \Rightarrow a + ar = -32$

$\therefore a(1+r) = -32 \Rightarrow a = \frac{-32}{1+r}$ ------①

$U_4 + U_5 = -4 \Rightarrow ar^3 + ar^4 = -4$

$\therefore ar^3(1+r) = -4$

$\therefore \frac{-32r^3}{1+r} \cdot (1+r) = -4 \Rightarrow -32r^3 = -4$

$\therefore r^3 = \frac{-4}{-32} \Rightarrow r^3 = \frac{1}{8} \Rightarrow r = \frac{1}{2}$ الأساس

نعوض الاساس في ①

$\therefore a = \frac{-32}{1+\frac{1}{2}} = \frac{-32}{\frac{3}{2}} = \frac{-64}{3}$

$\therefore U_7 = ar^6 \Rightarrow U_7 = \frac{-64}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{-64}{3} \times \frac{1}{64} = -\frac{1}{3}$ الحد السابع

⑦ اكتب المتتابعة الهندسية التي مجموع الحدود الستة الاولى منها 504 واساسها = 2

الحل/

$r = 2 \quad , \quad S_6 = 504$

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} \Rightarrow S_6 = \frac{a(1-r^6)}{1-r}$$

$$\therefore 504 = \frac{a(1-2^6)}{1-2} \Rightarrow 504 = \frac{-63a}{-1} \Rightarrow a = \frac{504}{63} = 8$$ الحد الاول

$\therefore \langle 8, 16, 32, 64, \ldots \ldots \rangle$ المتتابعة الهندسية

---

⑧ اذا كان مجموع متتابعة اساسها = 3 هو 728 وحدها الأخير هو 486 جد حدها الاول وعدد حدودها.

الحل/

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

$$728 = \frac{a(1-3^n)}{1-3} \Rightarrow a(1-3^n) = -1456 \quad \ldots ①$$

$$U_n = ar^{n-1} \Rightarrow 486 = a \times 3^{n-1}$$

$$\therefore a = \frac{486}{3^{n-1}} \quad \ldots ②$$

نعوض ② في ①

$$\frac{486}{3^{n-1}}(1-3^n) = -1456 \Rightarrow 486(1-3^n) = -1456 \times 3^{n-1}$$

$$486 - 486 \times 3^n = -1456 \times 3^n \times 3^{-1}$$

$$\left(486 - 486 \times 3^n = -\frac{1456 \times 3^n}{3}\right) \times 3$$

$$1458 - 1458 \times 3^n = -1456 \times 3^n$$

$$1458 = -1456 \times 3^n + 1458 \times 3^n$$

$$\therefore 1458 = 2 \times 3^n \Rightarrow 3^n = \frac{1458}{2} \Rightarrow 3^n = 729$$

$\therefore 3^n = 3^6 \Rightarrow n = 6$ عدد الحدود

نعوض $n = 6$ في ①

$$\therefore a = \frac{486}{3^{6-1}} = \frac{486}{243}$$

$\therefore a = 2$ الحد الاول


مفاجأة دار الأعرجي
أطلب من المكتبات
الملازم الملونة
ولجميع المراحل الدراسية

9 متتابعة هندسية موجبة الحدود حاصل ضرب حدودها الثلاثة الاولى = $\frac{1}{27}$ ومجموع حدودها الثاني والثالث والرابع = $\frac{13}{27}$ أوجد المتتابعة ؟ ثم جد مجموعها الى مالانهاية ؟

الحل / $a \cdot ar \cdot ar^2 = \frac{1}{27} \Rightarrow a^3r^3 = \frac{1}{27} \Rightarrow ar = \frac{1}{3}$ ....①

$ar + ar^2 + ar^3 = \frac{13}{27} \Rightarrow ar(1+r+r^2) = \frac{13}{27}$ ----②

نعوض ① في ②

$\frac{1}{3}(1+r+r^2) = \frac{13}{27} \Rightarrow 27(1+r+r^2) = 39 \quad] \div 3$

$9(1+r+r^2) = 13 \Rightarrow 9 + 9r + 9r^2 = 13 \Rightarrow$

$9r^2 + 9r - 4 = 0 \Rightarrow (3r+4)(3r-1) = 0$

either $3r+4=0 \Rightarrow r = \frac{-4}{3}$ يهمل لان حدود المتتابعة موجبة

or $3r-1=0 \Rightarrow 3r=1 \Rightarrow r = \frac{1}{3}$ الاساس

$ar = \frac{1}{3} \Rightarrow a \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \Rightarrow a = 1$ الحد الاول

$\therefore \langle 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \ldots \rangle$ المتتابعة

$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \ldots \infty$ مجموع المتتابعة

$\therefore S_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$

---

10 ثلاثة اعداد مكونة متتابعة حسابية مجموعها (18) ولو أضيفت الاعداد 7 ، 2 ، 1 الى حدودها على الترتيب لتألف من الاعداد الناتجة متتابعة هندسية ما هذه الاعداد ؟

الحل / لتكن $a-d, \; a, \; a+d$ الاعداد

$\therefore a-d+a+a+d = 18 \Rightarrow 3a = 18 \Rightarrow a = 6$

$\therefore 6-d, \; 6, \; 6+d$ الاعداد $\Rightarrow 7-d, \; 8, \; 13+d$ الاعداد بعد الاضافة

$\because$ وهي متتابعة هندسية فإن:

$$\frac{8}{7-d} = \frac{13+d}{8} \Rightarrow$$

$$(7-d)(13+d) = 64 \Rightarrow 91 + 7d - 13d - d^2 - 64 = 0$$

$$\therefore (-d^2 - 6d + 27 = 0) \times -1 \Rightarrow d^2 + 6d - 27 = 0 \Rightarrow$$

$$(d+9)(d-3) = 0$$

either $d+9=0 \Rightarrow d=-9$ or $d-3=0 \Rightarrow d=3$

$\therefore 15, 6, -3$ الأعداد or $3, 6, 9$ الأعداد

---

11 متتابعة حسابية حدها الأول (3) فإذا كان حدها الثاني والرابع والثامن تؤلف متتابعة هندسية. أوجد المتتابعة الحسابية.

الحل/ الحدود تؤلف متتابعة هندسية U_2, U_4, U_8

حيث $U_2 = a+d, \quad U_4 = a+3d, \quad U_8 = a+7d$

$\therefore \langle a+d, a+3d, a+7d, \ldots \rangle$ متتابعة هندسية

حيث d أساس المتتابعة الحسابية وأيضاً $a=3$ من معطيات السؤال.

$\therefore \frac{a+3d}{a+d} = \frac{a+7d}{a+3d} = r$ أساس المتتابعة الهندسية

$\therefore \frac{3+3d}{3+d} = \frac{3+7d}{3+3d} \Rightarrow (3+7d)(3+d) = (3+3d)^2$

وبفتح الأقواس فإن:

$$9 + 3d + 21d + 7d^2 = 9 + 18d + 9d^2$$

$$\Rightarrow -2d^2 + 6d = 0 \Rightarrow -2d(d-3) = 0 \Rightarrow d=0 \text{ or } d=3$$

$\therefore \langle 3, 3, 3, 3, \ldots \rangle$ المتتابعة الحسابية عندما $d=0$

or $\langle 3, 6, 9, 12, \ldots \rangle$ المتتابعة الحسابية عندما $d=3$

---

12 إذا كان مجموع ثلاثة أعداد تؤلف متتابعة هندسية يساوي (70) فإذا ضربنا كل من حدها الأول والثالث في (4) وحدها الثاني في (5) كانت الأعداد الناتجة تؤلف متتابعة حسابية ما هذه الأعداد؟

الحل/ لتكون الأعداد a, ar, ar^2 متتابعة هندسية فإن:

$$a + ar + ar^2 = 70$$

$4a, 5ar, 4ar^2$ الحدود بعد الضرب

$\therefore \langle 4a, 5ar, 4ar^2, \ldots \rangle$ تكون متتابعة حسابية

$\therefore 5ar - 4a = 4ar^2 - 5ar = \ldots$ أساس المتتابعة

وبقسمة الطرفين على a حيث $a \neq 0$ نحصل على:

$5r - 4 = 4r^2 - 5r \Rightarrow 4r^2 - 10r + 4 = 0 \Rightarrow 2r^2 - 5r + 2 = 0$

$\therefore (2r-1)(r-2) = 0$

either $2r - 1 = 0 \Rightarrow r = \frac{1}{2} \Rightarrow a + \frac{1}{2}a + \frac{1}{4}a = 70 \Rightarrow \frac{7a}{4} = 70$

$\Rightarrow 7a = 4 \times 70 \Rightarrow a = \frac{4 \times 70}{7} = 40$

$\therefore 40 , 20 , 10$ الاعداد

or $r - 2 = 0 \Rightarrow r = 2 \Rightarrow a + 2a + 4a = 70 \Rightarrow 7a = 70$

$\therefore a = \frac{70}{7} = 10$

$\therefore 10 , 20 , 40$ الاعداد

اسئلة اثرائية محلولة :

① عدد مكون من ثلاثة ارقام تكون متتابعة حسابية فاذا كان مجموع ارقامه يساوي (15) وحاصل ضرب رقم احاده في رقم مئاته يساوي (21) فما العدد ؟

الحل/ نفرض ارقام العدد على التوالي: $a-d ,\ a ,\ a+d$

$a - d + a + a + d = 15 \Rightarrow 3a = 15 \Rightarrow a = \frac{15}{3} = 5$

رقم احاده $(a+d)$ × رقم مئاته $(a-d)$ = 21 الحل:

$(a+d)(a-d) = 21 \Rightarrow a^2 - d^2 = 21 \Rightarrow 25 - d^2 = 21$ لأن $a = 5$

$\therefore d^2 = 25 - 21 = 4 \Rightarrow d = \mp 2$

عندما : $a = 5 , d = 2$ يكون العدد 357

عندما : $a = 5 , d = -2$ يكون العدد 753

---

② اذا أدخلنا عدة اوساط حسابية بين العددين 2 , 23 وكانت النسبة بين الوسط الاول والوسط الأخير هي $\frac{1}{4}$ فما عدد الاوساط ؟

الحل/ ليكن الأساس (d) فأن :

المتتابعة $\langle 2,\ 2+d,\ 2+2d,\ \ldots\ldots,\ 23-2d,\ 23-d,\ 23 \rangle$

(و1 = $2+d$ ، و2 = $2+2d$ ، و الاخير = $23-d$)

$\frac{2+d}{23-d} = \frac{1}{4} \Rightarrow 8 + 4d = 23 - d \Rightarrow d = 3$ الأساس

$u_n = a + (n-1)d \Rightarrow 23 = 2 + (n-1) \times 3 \Rightarrow 23 - 2 = (n-1) \times 3$

$\therefore n - 1 = \frac{21}{3} = 7 \Rightarrow n = 7 + 1 = 8$ عدد الحدود

وبما ان عدد الحدود = عدد الاوساط + 2 ⟸ 8 = عدد الاوساط + 2 ⟸ عدد الاوساط = 6

③ قسم العدد 183 الى ثلاثة أعداد بحيث يؤلف متتابعة هندسية بحيث يكون مجموع الحد الاول والثالث يساوي $\frac{41}{20}$ u_2 فما هي الاعداد ؟

الحل/ نفرض الاعداد وهي تؤلف متتابعة هندسية : a, ar, ar^2

$\therefore a + ar^2 = \frac{41}{20} u_2 \Rightarrow a + ar^2 = \frac{41}{20} ar \Rightarrow$

$(20a + 20ar^2 = 41ar) \div a \neq 0 \Rightarrow$

$20 + 20r^2 = 41r \Rightarrow 20r^2 - 41r + 20 = 0 \Rightarrow$

$(5r - 4)(4r - 5) = 0$

either $5r - 4 = 0 \Rightarrow r = \frac{4}{5}$ or $4r - 5 = 0 \Rightarrow r = \frac{5}{4}$

عندما $r = \frac{4}{5}$ فإن مجموع الحدود = العدد $a + \frac{4}{5}a + (\frac{4}{5})^2 a = 183$

$\Rightarrow a = 75$ الاعداد $\therefore 75, 60, 48$

عندما $r = \frac{5}{4}$ فإن : $a + \frac{5}{4}a + (\frac{5}{4})^2 a = 183$

$\Rightarrow a = 48$ الاعداد $\therefore 48, 60, 75$

أسئلة واجب اضافية /

① ثلاثة اعداد صحيحة موجبة تكون متتابعة هندسية مجموعها (65) ولو ضرب الاول في (6) والثاني في (4) والثالث في (2) لكونت الاعداد الناتجة متتابعة حسابية فما هي الاعداد ؟ ج (5, 15, 45) .

② متتابعة متكونة من اربعة اعداد حدها الاول = 2 وحدها الرابع = 12 فاذا كانت حدودها الثلاثة الاولى تكون متتابعة هندسية وحدودها الثلاثة الاخيرة تكون متتابعة حسابية اوجد الاعداد .

ج/ الاعداد $2, 4, 8, 12$

او الاعداد $2, -3, \frac{9}{2}, 12$

الفصل الثالث
chapter 3

الاستقراء الرياضي Mathematical Induction

طريقة استنتاجية للإثبات على صحة العلاقات الرياضية

نتبع : ثلاث خطوات للإثبات :

1- عندما نفرض $n=1$ نثبت ان العلاقة المعطاة صحيحة .

2- نفترض ان العلاقة المعطاة صحيحة عندما $n=r$

3- نبرهن ان العلاقة صحيحة عندما $n=r+1$ حيث ان :

$n=\{1,2,3,4,\ldots\}$ وبذلك نقول ان العلاقة صحيحة لكل n عدد صحيح موجب . واليك الامثلة التالية وطريقة البرهان وتسمى طريقة البرهان بطريقة (الاستقراء الرياضي) احياناً تسمى (الاستنتاج الرياضي)

مثال 1/ برهن أن :

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

البرهان: اولاً : عندما $n=1$ فان

نأخذ الحد الاول من الطرف الايسر ونعوض $n=1$ في الطرف الايمن $1=\frac{1(1+1)}{2}=1$

نلاحظ ان الطرف الايسر = الطرف الايمن فنقول ان العلاقة صحيحة .

ثانياً: نفرض العلاقة صحيحة عندما $n=r$ اي نعوض بدل كل n بـ r ونقول ان العلاقة صحيحة

$$1+2+3+\ldots+r=\frac{r(r+1)}{2}$$

ثالثاً: نبرهن ان العلاقة صحيحة عندما $n=r+1$ وذلك باضافة حد (هو تعويض $(r+1)$ بدل n في الحد الاخير من العلاقة) الى طرفي العلاقة في ثانياً

ففي هذا المثال نضيف $(r+1)$ الى طرفي العلاقة في ثانياً فيكون :

$$1+2+3+\ldots+r+(r+1)=\frac{r(r+1)}{2}+(r+1)$$

فنجد ناتج الطرف الايمن فنحصل على :

$$\frac{r(r+1)}{2}+(r+1)=\frac{r(r+1)+2(r+1)}{2}$$

$$=\frac{(r+1)(r+2)}{2}$$

وللتحقق من ان الناتج صحيح نعوض عن كل n في الطرف الايمن $(r+1)$ فنجد ان الناتج مطابق لما حصلنا عليه أخيراً .

فنقول ان العلاقة صحيحة لكل n عدد صحيح موجب .

مثال 2/ برهن صحة العلاقة بطريقة الاستقراء الرياضي:

$$(1)(2)+(2)(3)+\dots+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

الحل/ البرهان:

اولاً: عندما n = 1 فأن /

$$(1)(2)=\frac{1(1+1)(1+2)}{3} \Rightarrow$$

$$2=\frac{2\times 3}{3}=2 \Rightarrow$$ الطرف الايمن = الطرف الايسر

∴ العلاقة صحيحة عندما $n=1$

ثانياً: نفرض ان العلاقة صحيحة عندما $n=r$

$$(1)(2)+(2)(3)+\dots+r(r+1)=\frac{r(r+1)(r+2)}{3}$$

ثالثاً: نبرهن صحة العلاقة عندما $n=r+1$ نضيف الى طرفي العلاقة في ثانياً $(r+1)(r+2)$ فيكون:

$$(1)(2)+(2)(3)+\dots+r(r+1)+(r+1)(r+2)=\frac{r(r+1)(r+2)}{3}+(r+1)(r+2)$$

$$=\frac{r(r+1)(r+2)+3(r+1)(r+2)}{3}=\frac{(r+1)(r+2)(r+3)}{3}$$

∴ العلاقة صحيحة عندما $n=r+1$

∴ العلاقة الرياضية صحيحة لكل n عدد صحيح موجب .

مثال 3/ لكل $n\in N^*$ برهن ان 5^n-2^n يقبل القسمة على 3 بدون باقي .

البرهان// اولاً: عندما $n=1$ فأن: $\frac{5^1-2^1}{3}=\frac{3}{3}=1$ عدد صحيح

ثانياً: عندما $n=r$ نفرض ان $\frac{5^r-2^r}{3}$ عدد صحيح موجب (صحيحة)

ثالثاً: نبرهن ان 5^n-2^n يقبل القسمة على 3 عندما $n=r+1$

$$\therefore \frac{5^{r+1}-2^{r+1}}{3}=\frac{5^r\times 5^1-2^r\times 2^1}{3}=\frac{5^r(3+2)-2^r\times 2}{3}$$

$$=\frac{5^r\times 3+5^r\times 2-2^r\times 2}{3}=\frac{5^r\times 3}{3}+\frac{2(5^r-2^r)}{3}$$

$$=5^r+2\left(\frac{5^r-2^r}{3}\right)$$ = عدد صحيح + 2 (عدد صحيح) = عدد صحيح

∴ 5^n-2^n يقبل القسمة على 3 بدون باقي لكل $n\in Z^+$

تمارين (1 - 3)

① بأستخدام الاستقراء الرياضي برهن مايلي:

ⓐ $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

البرهان/ أولاً: عندما $n = 1$ فأن:

$1^2 = \frac{1(1+1)(2\times1+1)}{6} \Rightarrow$

$1 = \frac{2 \times 3}{6} = \frac{6}{6} = 1$

∴ العلاقة صحيحة

ثانياً: نفرض العلاقة صحيحة عندما $n = r$ فأن:

$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + r^2 = \frac{r(r+1)(2r+1)}{6}$

ثالثاً: نبرهن على صحة العلاقة عندما $n = r+1$ وذلك بإضافة $(r+1)^2$ الى طرفي العلاقة في ثانياً فيكون:

$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + r^2 + (r+1)^2 = \frac{r(r+1)(2r+1)}{6} + (r+1)^2$

$= \frac{r(r+1)(2r+1) + 6(r+1)^2}{6}$

$= \frac{(r+1)[r(2r+1) + 6(r+1)]}{6}$

$= \frac{(r+1)(2r^2 + r + 6r + 6)}{6}$

$= \frac{(r+1)(2r^2 + 7r + 6)}{6}$

$= \frac{(r+1)(r+2)(2r+3)}{6}$

∴ العلاقة صحيحة عندما $n = r+1$

∴ العلاقة صحيحة $\forall n \in Z^+$

ⓑ $\frac{1}{(1)(2)} + \frac{1}{(2)(3)} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

البرهان:

اولاً: عندما $n = 1$ فأن:

$\frac{1}{(1)(2)} = \frac{1}{1+1} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

∴ العلاقة صحيحة عندما $n = 1$

ثانياً: نفرض صحة العلاقة عندما $n=r$ فإن:

$$\frac{1}{(1)(2)}+\frac{1}{(2)(3)}+\cdots+\frac{1}{r(r+1)}=\frac{r}{r+1}$$

ثالثاً: نبرهن على صحة العلاقة عندما $n=r+1$ وذلك بإضافة $\frac{1}{(r+1)(r+2)}$ فيكون

$$\frac{1}{(1)(2)}+\frac{1}{(2)(3)}+\cdots+\frac{1}{r(r+1)}+\frac{1}{(r+1)(r+2)}=\frac{r}{r+1}+\frac{1}{(r+1)(r+2)}$$

$$=\frac{r(r+2)+1}{(r+1)(r+2)}=\frac{r^2+2r+1}{(r+1)(r+2)}=\frac{(r+1)(r+1)}{(r+1)(r+2)}=\frac{r+1}{r+2}$$

∴ العلاقة صحيحة عندما $n=r+1$

∴ العلاقة صحيحة $\forall n\in Z^+$

ⓒ $2^1+2^2+2^3+\cdots+2^n=2^{n+1}-2$

البرهان / أولاً: عندما $n=1$ فإن: $2^1=2^{1+1}-2 \Rightarrow 2=4-2$

∴ $2=2$

فالعلاقة صحيحة

ثانياً: نفرض ان العلاقة صحيحة عندما $n=r$ فإن:

$$2^1+2^2+2^3+\cdots+2^r=2^{r+1}-2$$

ثالثاً: نبرهن ان العلاقة صحيحة عندما $n=r+1$ وذلك بإضافة 2^{r+1} الى طرفي العلاقة في ثانياً فيكون:

$$2^1+2^2+2^3+\cdots+2^r+2^{r+1}=2^{r+1}-2+2^{r+1}$$

$$=2\times2^{r+1}-2$$

$$=2^{r+2}-2$$

∴ العلاقة صحيحة عندما $n=r+1$ فإن العلاقة صحيحة $\forall n\in Z^+$

ⓓ $\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\cdots+\frac{1}{3^n}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)$

البرهان: أولاً/ عندما $n=1$ فإن: $\frac{1}{3}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^1}\right)\Rightarrow$

$\frac{1}{3}=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\Rightarrow\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$

∴ العلاقة صحيحة

ثانياً/ نفرض ان العلاقة صحيحة عندما $n=r$ فإن:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\dots+\frac{1}{3^r}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^r}\right)$$

ثالثاً / نبرهن صحة العلاقة عندما $n=r+1$ وذلك بإضافة $\frac{1}{3^{r+1}}$ إلى طرفي العلاقة في ثانياً فيكون :

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\dots+\frac{1}{3^r}+\frac{1}{3^{r+1}}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^r}\right)+\frac{1}{3^{r+1}}$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\times3^r}+\frac{1}{3^{r+1}}$$

$$=\frac{3^{r+1}-3+2}{2\times3^{r+1}}=\frac{3^{r+1}-1}{2\times3^{r+1}}$$

$$=\frac{3^{r+1}}{2\times3^{r+1}}-\frac{1}{2\times3^{r+1}}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{3^{r+1}}$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^{r+1}}\right)$$ ∴ العلاقة صحيحة عندما $n=r+1$

∴ العلاقة صحيحة $\forall n\in Z^+$

ج) $1^3+2^3+3^3+\dots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$

البرهان/ أولاً : عندما $n=1$ فإن

$$1^3=\frac{1^2(1+1)^2}{4}\Rightarrow 1=\frac{1\times4}{4}\Rightarrow 1=1$$ ∴ العلاقة صحيحة

ثانياً : نفرض ان العلاقة صحيحة عندما $n=r$ فإن :

$$1^3+2^3+3^3+\dots+r^3=\frac{r^2(r+1)^2}{4}$$

ثالثاً : نبرهن صحة العلاقة عندما $n=r+1$ وذلك بإضافة $(r+1)^3$ إلى طرفي العلاقة في ثانياً فيكون :

$$1^3+2^3+3^3+\dots+r^3+(r+1)^3=\frac{r^2(r+1)^2}{4}+(r+1)^3$$

$$=\frac{r^2(r+1)^2+4(r+1)^3}{4}$$

$$=\frac{(r+1)^2(r^2+4(r+1))}{4}=\frac{(r+1)^2(r^2+4r+4)}{4}$$

$$=\frac{(r+1)^2(r+2)^2}{4}$$

∴ العلاقة صحيحة عندما $n=r+1$ فالعلاقة صحيحة $\forall n\in Z^+$

② برهن ما يلي :

ⓐ

$$(1)(2)(3)+(2)(3)(4)+(3)(4)(5)+\cdots+n(n+1)(n+2)=\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$$

البرهان / اولاً : عندما $n=1$ فان :

$$(1)(2)(3)=\frac{1}{4}\times 1(1+1)(1+2)(1+3)\Rightarrow 6=\frac{1}{4}\times 2\times 3\times 4$$

$$\Rightarrow 6=6$$

∴ العلاقة صحيحة

ثانياً : نفرض ان العلاقة صحيحة عندما $n=r$

$$(1)(2)(3)+(2)(3)(4)+(3)(4)(5)+\cdots+r(r+1)(r+2)=\frac{1}{4}r(r+1)(r+2)(r+3)$$

ثالثاً : نبرهن صحة العلاقة عندما $n=r+1$ وذلك باضافة $(r+1)(r+2)(r+3)$ الى طرفي العلاقة في ثانياً فيكون :

$$(1)(2)(3)+(2)(3)(4)+(3)(4)(5)+\cdots+r(r+1)(r+2)+(r+1)(r+2)(r+3)$$

$$=\frac{1}{4}r(r+1)(r+2)(r+3)+(r+1)(r+2)(r+3)$$

$$=\frac{r(r+1)(r+2)(r+3)+4(r+1)(r+2)(r+3)}{4}$$

$$=\frac{(r+1)(r+2)(r+3)(r+4)}{4}$$

∴ العلاقة صحيحة عندما $n=r+1$

∴ العلاقة صحيحة $\forall n\in Z^+$

ⓑ

$$1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2=\frac{n(2n+1)(2n-1)}{3}$$

البرهان / اولاً : عندما $n=1$ فان :

$$1^2=\frac{1(2\times1+1)(2\times1-1)}{3}\Rightarrow$$

$$1=\frac{1\times 3\times 1}{3}\Rightarrow 1=1$$

∴ العلاقة صحيحة

ثانياً : نفرض ان العلاقة صحيحة عندما $n=r$ فان :

$$1^2+3^2+5^2+\cdots+(2r-1)^2=\frac{r(2r+1)(2r-1)}{3}$$

ثالثاً : نبرهن صحة العلاقة عندما $n=r+1$ وذلك باضافة $(2r+1)^2$ الى طرفي العلاقة في ثانياً فيكون :

$$1^2+3^2+5^2+\cdots+(2r-1)^2+(2r+1)^2$$

$$=\frac{r(2r+1)(2r-1)}{3}+(2r+1)^2$$

$$= \frac{r(2r+1)(2r-1)+3(2r+1)^2}{3} = \frac{(2r+1)[r(2r-1)+3(2r+1)]}{3}$$

$$= \frac{(2r+1)(2r^2-r+6r+3)}{3} = \frac{(2r+1)(2r^2+5r+3)}{3}$$

$$= \frac{(2r+1)(2r+3)(r+1)}{3} = \frac{(r+1)(2r+3)(2r+1)}{3}$$

∴ العلاقة صحيحة عندما $n=r+1$ فالعلاقة صحيحة $\forall n \in Z^+$

---

③ باستخدام الاستقراء الرياضي برهن ما يلي: ⓐ $\frac{6^n-2^n}{4} \in N^+$

ملاحظة: N^+ مجموعة الاعداد الطبيعية عدا الصفر ويمكن ان نكتب Z^+ مجموعة الاعداد الصحيحة الموجبة.

البرهان/ اولاً: عندما $n=1$ فان: $\frac{6^1-2^1}{4} = \frac{6-2}{4} = 1 \in N^+$

ثانياً: عندما $n=r$ نفرض أن: $\frac{6^r-2^r}{4} \in N^+$

ثالثاً: عندما $n=r+1$ نبرهن أن:

$$\frac{6^{r+1}-2^{r+1}}{4} \in N^+ \Rightarrow \frac{6^r \times 6^1 - 2^r \times 2^1}{4} = \frac{6^r(4+2)-2^r \times 2}{4}$$

$$= \frac{6^r \times 4 + 6^r \times 2 - 2^r \times 2}{4} = \frac{6^r \times 4}{4} + \frac{2(6^r-2^r)}{4}$$

$$= \underset{\in N^+}{6^r} + 2\underset{\in N^+}{\left(\frac{6^r-2^r}{4}\right)} \rightarrow \frac{6^{r+1}-2^{r+1}}{4} \in N^+$$

∴ $\forall n \in N^+$ فان: $\frac{6^n-2^n}{4} \in N^+$

ⓑ $\frac{n(n+1)}{2} \in N^+$

البرهان/ اولاً: عندما $n=1$ فان:

$$\frac{1(1+1)}{2} = \frac{1 \times 2}{2} = 1 \in N^+$$

ثانياً: عندما $n=r$ نفرض ان:

$$\frac{r(r+1)}{2} \in I$$

ثالثاً: عندما $n=r+1$ نبرهن على ان:

$$\frac{(r+1)(r+2)}{2} \in N^+ \Rightarrow \underset{\in N^+}{\frac{r(r+1)}{2}} + \underset{\in N^+}{\frac{2(r+1)}{2}} \Rightarrow \frac{(r+1)(r+2)}{2} \in N^+$$

$\therefore \forall n \in N^+$ فان $\frac{n(n+1)}{2} \in N^+$

(c) $\frac{x^n-1}{x-1} \in N^+ \quad , x \neq 1$

البرهان: اولاً: عندما $n=1$ فان المقدار $\frac{x^1-1}{x-1} = \frac{x-1}{x-1} = 1 \in N^+$

ثانياً: عندما $n=r$ نفرض ان: $\frac{x^r-1}{x-1} \in N^+$

ثالثاً: عندما $n=r+1$ نبرهن ان: $\frac{x^{r+1}-1}{x-1} \in N^+$

$$\Rightarrow \frac{x^r \cdot x - 1}{x-1} = \frac{x^r \cdot x - 1 + x - x}{x-1} = \frac{x^r \cdot x - x}{x-1} + \frac{x-1}{x-1}$$

$$= \underbrace{\frac{x(x^r-1)}{x-1}}_{\in N^+} + \underbrace{1}_{\in N^+}$$

$\therefore \forall n \in N^+$ فان $\frac{x^n-1}{x-1} \in N^+ \quad x \neq 1$

---

(4) لكل $a, r \in R$ وان $r \neq 1$ أثبت أن:

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} = \frac{a(1-r^n)}{1-r}, \forall n \in N^+$$

البرهان: اولاً/ عندما $n=1$ فان: $a = \frac{a(1-r^1)}{1-r} = a$

$\therefore$ العلاقة صحيحة

ثانياً/ نفرض انه عندما $n=s$ فالعلاقة صحيحة

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{s-1} = \frac{a(1-r^s)}{1-r}$$

ثالثاً/ نبرهن صحة العلاقة عندما $n=s+1$ وذلك بأضافة ar^s الى طرفي العلاقة في ثانياً فيكون:

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{s-1} + ar^s = \frac{a(1-r^s)}{1-r} + ar^s$$

$$= \frac{a(1-r^s) + ar^s(1-r)}{1-r}$$

$$= \frac{a - ar^s + ar^s - ar^{s+1}}{1-r}$$

$$= \frac{a - ar^{s+1}}{1-r} = \frac{a(1-r^{s+1})}{1-r}$$

∴ العلاقة صحيحة عندما $n = s+1$

∴ العلاقة صحيحة $\forall n \in N^+$

سؤال اثرائي : اثبت بطريقة الاستقراء الرياضي : حيث $a, d \in R$ وان $d \neq 1$

$$a + (a+d) + (a+2d) + \cdots + [a+(n-1)d] = \frac{n}{2}(2a+(n-1)d)$$

الاثبات / اولاً : عندما $n=1$ فان :

$$a = \frac{1}{2}(2a + (1-1)d) = \frac{1}{2}(2a+0) = a$$

∴ العلاقة صحيحة .

ثانياً: عندما $n=r$ نفرض ان العلاقة صحيحة أي :

$$a + (a+d) + (a+2d) + \cdots + [a+(r-1)d] = \frac{r}{2}[2a+(r-1)d]$$

ثالثاً : عندما $n=r+1$ نثبت صحة العلاقة وذلك باضافة $(a+rd)$ الى طرفي العلاقة في ثانياً فيكون :

$$a + (a+d) + (a+2d) + \cdots + (a+(r-1)d) + (a+rd) = \frac{r}{2}[2a+(r-1)d] + (a+rd)$$

$$= \frac{r(2a+(r-1)d) + 2(a+rd)}{2}$$

$$= \frac{2ar + r^2d - rd + 2a + 2rd}{2}$$

$$= \frac{(2ar+2a) + (r^2d+rd)}{2} = \frac{2a(r+1) + rd(r+1)}{2}$$

$$= \frac{(r+1)}{2}[2a+rd]$$ ∴ العلاقة صحيحة

∴ العلاقة صحيحة $\forall n \in N^+$

الفصل الرابع
chapter 4

Conic Sections القطوع المخروطية

الرمز أو العلاقة الرياضية	المصطلح	
$c(h,k)$	مركز الدائرة	
r	نصف قطر الدائرة	
$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$	القياسية	معادلة الدائرة
$x^2+y^2+Ax+By+c=0$	العامة	

$h=\frac{-A}{2}$, $k=\frac{-B}{2}$

$r=\sqrt{h^2+k^2-c}$ نصف قطر الدائرة

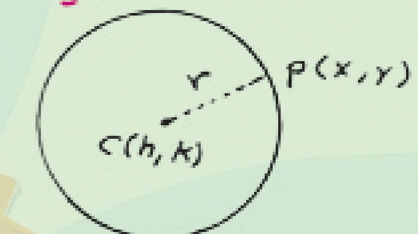
الدائرة : Circle

تعريف : هي المحل الهندسي لنقطة تتحرك بحيث يكون بعدها عن نقطة ثابتة تسمى (المركز center) يساوي مقداراً ثابتاً يسمى (نصف القطر Radius) لذلك سنرمز لمركز الدائرة $c(h,k)$ ونرمز لنصف قطر الدائرة بالرمز (r)

والتعريف الرياضي للدائرة

$$Circle = \{p : pc = r \ , \ r > 0\}$$

حيث $p(x,y)$ هي نقطة point في المستوي plane



معادلة الدائرة القياسية : Characteristic Equation of Circle

$pc = r \quad , \quad r > 0 \qquad p(x,y) \quad , \quad c(h,k)$

$$r = \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2}$$

وبالتربيع

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

معادلة الدائرة القياسية أو تسمى الصيغة القياسية لمعادلة الدائرة

حالة خاصة : اذا كانت معادلة الدائرة $x^2 + y^2 = r^2$ فان مركز الدائرة هي نقطة الاصل $(0,0)$.

مثال 1/ جد معادلة الدائرة التي مركزها $(4,-3)$ ونصف قطرها 5 وحدات .

الحل/ من الصيغة القياسية لمعادلة الدائرة

$r = 5 \ , \ c(h,k) = c(4,-3)$

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

$$(x-4)^2 + (y+3)^2 = 25$$

مثال2/ اوجد مركز ونصف قطر الدائرة التي معادلتها $(x-5)^2 + (y+3)^2 = 49$

الحل/ بالمقارنة مع الصيغة القياسية للمعادلة $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

$h = 5 \ , \ k = -3 \quad , \quad r^2 = 49 \Rightarrow c(5,-3)$ المركز $\quad , \quad r = \sqrt{49} = 7$ units نصف القطر

بعض القوانين السابقة التي درستها

قانون المسافة بين نقطتين

① $P_1(x_1, y_1) \quad , \quad P_2(x_2, y_2)$

$$P_1P_2 = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$$

② قانون البعد بين نقطة ومستقيم

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + c|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$Ax_1 + By_1 + c = 0$, d, $p(x_1, y_1)$

③ تنصيف قطعة مستقيم $\overline{P_1P_2}$ حيث $P_1(x_1, y_1)$ ، $P_2(x_2, y_2)$ في المستوي الاحداثي :

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad , \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

$$\therefore p(x, y) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) \quad \text{نقطة التنصيف}$$

$P_1(x_1, y_1)$ — $p(x, y)$ — $P_2(x_2, y_2)$

مثال 1/ جد معادلة الدائرة التي مركزها $c(4,3)$ وتمر بالنقطة $p(2,1)$

الحل/ نجد نصف القطر

$$r = pc = \sqrt{(4-2)^2 + (3-1)^2}$$

$$= \sqrt{4+4} = \sqrt{8} \text{ units}$$

$$\therefore (x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2 \quad \text{المعادلة القياسية للدائرة}$$

$$\therefore (x-4)^2 + (y-3)^2 = 8 \quad \text{معادلة الدائرة}$$

مثال 2/ جد معادلة الدائرة التي نهايتي أحد أقطارها النقطتان :

$P_1(4,5)$ ، $P_2(-2,3)$

الحل/ المركز $c(h, k)$ هو منتصف القطر P_1P_2

$P_1(x_1, y_1)$, $c(h, k)$, $P_2(x_2, y_2)$

$$\therefore x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-2+4}{2} = 1$$

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{3+5}{2} = 4$$

$$\therefore c(1,4) \quad \text{المركز}$$

$$r = P_1C = \sqrt{(4-1)^2 + (5-4)^2} = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10} \text{ units}$$

$$\therefore r = \sqrt{10} \text{ units} \quad \text{نصف القطر}$$

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2 \quad \text{المعادلة القياسية}$$

$$\therefore (x-1)^2 + (y-4)^2 = 10 \quad \text{معادلة الدائرة}$$

مثال 3/ جد معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الاصل وتمس المستقيم الذي معادلته $3x - 4y - 15 = 0$.

الحل/ قانون المسافة بين نقطة ومستقيم

$$r = d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$= \frac{|3\times0 - 4\times0 - 15|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{15}{\sqrt{25}} = \frac{15}{5} = 3$$

$\therefore r = 3$ units نصف القطر

$\therefore x^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 9$ المعادلة المطلوبة

ملاحظة: توجد طريقة ثانية لايجاد معادلة الدائرة عن طريق استخدام القاعدة التالية:
اذا كانت $p_1(x_1, y_1)$ ، $p_2(x_2, y_2)$ هي احداثيات نهايتي قطر فيها فان معادلة الدائرة هي
$$x^2 + y^2 - x(x_1 + x_2) - y(y_1 + y_2) + x_1x_2 + y_1y_2 = 0$$

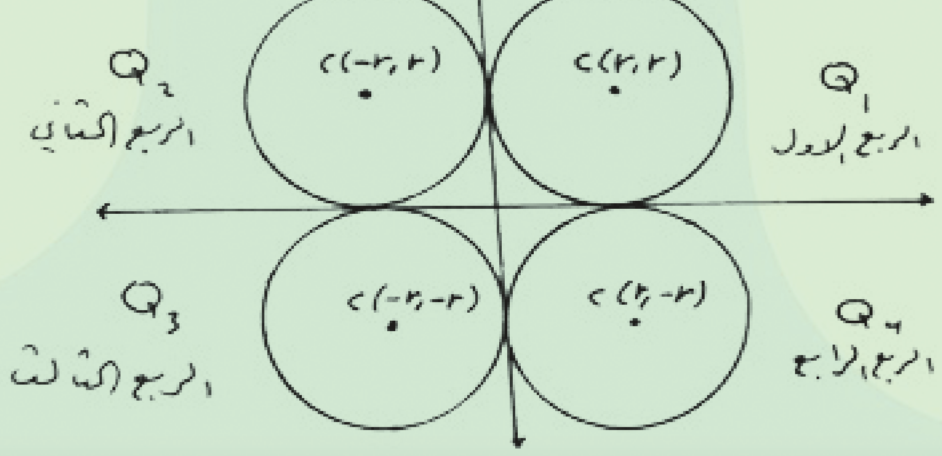
معادلة الدائرة اذا مست أحد المحورين أو مع كليهما :

اذا علم المركز ونصف القطر r

اذا كان مركز الدائرة $c(h, k)$ ونصف قطرها (r) والدائرة تمس :

1- محور السينات فان $r = |k|$ ونقطة التماس هي $(h, 0)$
2- محور الصادات فان $r = |h|$ ونقطة التماس هي $(0, k)$
3- المحورين الاحداثيين فان $r = |h| = |k|$ ونقطتا التماس $(0, k)$ $(h, 0)$

فاذا وقعت الدائرة في الربع الاول يكون مركزها $c(r, r)$
واذا وقعت الدائرة في الربع الثاني يكون مركزها $c(-r, r)$
واذا وقعت الدائرة في الربع الثالث يكون مركزها $c(-r, -r)$
واذا وقعت الدائرة في الربع الرابع يكون مركزها $c(r, -r)$



مثال 1/ جد معادلة الدائرة التي تمس المحور السيني ومركزها $(3,2)$

الحل/ بما ان الدائرة تمس المحور السيني ومركزها $c(3,2)$

نصف القطر $\therefore\ r = |k| = |2| = 2$ units

المعادلة القياسية $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

المعادلة المطلوبة $\therefore\ (x-3)^2 + (y-2)^2 = 4$

وبتبسيط المعادلة نحصل على $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0$

وتسمى المعادلة العامة .

ملاحظة: يمكن ايجاد المعادلة للدائرة التي تمس المحور السيني بطريقة اخرى حسب القاعدة

$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 = 0$

فيكون الحل حسب هذه القاعدة $x^2 + y^2 - 2(3x) - 2(2y) + (3)^2 = 0$

المعادلة $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0$

مثال 2/ جد معادلة الدائرة التي تمس المحور الصادي ومركزها $c(4,-1)$

الحل/ بما ان الدائرة تمس المحور الصادي ومركزها $c(4,-1)$

نصف القطر $\therefore\ r = |h| = |4| = 4$ units

معادلة الدائرة $\therefore\ (x-4)^2 + (y+1)^2 = 16$

بتبسيط المعادلة نحصل على المعادلة العامة $x^2 + y^2 - 8x + 2y + 1 = 0$

ملاحظة: يمكن ايجاد المعادلة للدائرة التي تمس المحور الصادي بطريقة اخرى حسب القاعدة

$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + k^2 = 0$

$\therefore\ x^2 + y^2 - 2(4x) - 2(-y) + (-1)^2 = 0 \Rightarrow$

المعادلة العامة $x^2 + y^2 - 8x + 2y + 1 = 0$

مثال 3/ جد معادلة الدائرة التي تمس المحورين الاحداثيين ومركزها $(4,-4)$

الحل/ بما ان الدائرة تمس المحورين $\therefore\ r = |h| = |k|$

نصف القطر $= |4| = |-4| = 4$ units

المعادلة القياسية $\therefore\ (x-4)^2 + (y+4)^2 = 16$

المعادلة العامة $x^2 + y^2 - 8x + 8y + 16 = 0$

ويمكن حل السؤال باستخدام الملاحظتين السابقتين :

$x^2 + y^2 - 2(4)x - 2(-4)y + 16 = 0$

$x^2 + y^2 - 8x + 8y + 16 = 0$

مثال 4/ جد معادلة الدائرة التي تمس المحورين وتقع في الربع الثالث ونصف قطرها 5 وحدات

الحل/ بما ان الدائرة تقع في الربع الثالث

$\therefore c(-r,-r)=c(-5,-5)$

$\therefore (x+5)^2+(y+5)^2=25$ المعادلة القياسية

$x^2+y^2+10x+10y+25=0$ بالتبسيط

مثال 5/ جد معادلة الدائرة المارة بالنقطة $p(2,1)$ وتمس المحورين الاحداثيين

الحل/ بما ان الدائرة تمس المحورين وتمر بالنقطة $p(2,1)$ في تقع في الربع الاول

$\therefore r=|h|=|k|$

$\therefore (x-h)^2+(y-k)^2=r^2 \quad ---- (1)$

نعوض عن $h=r$ ، $k=r$ والنقطة $p(x,y)=p(2,1)$ في المعادلة

$\therefore (2-r)^2+(1-r)^2=r^2$

$\therefore 4-4r+r^2+1-2r+r^2=r^2$

$\therefore r^2-6r+5=0 \Rightarrow (r-5)(r-1)=0$

either $r-5=0 \Rightarrow r=5 \Rightarrow c(5,5)$ المركز

$\therefore (x-5)^2+(y-5)^2=25$ المعادلة

or $r-1=0 \Rightarrow r=1 \Rightarrow c(1,1)$ المركز

$\therefore (x-1)^2+(y-1)^2=1$ المعادلة

المعادلة العامة للدائرة : General Equation of circle

للحصول على المعادلة العامة للدائرة نبسط المعادلة القياسية :

$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2 \Rightarrow$

$x^2-2hx+h^2+y^2-2ky+k^2=r^2$

$\therefore x^2+y^2-2hx-2ky+(h^2+k^2-r^2)=0$

نعوض عن $A=-2h$ ، $B=-2k$ ، $C=h^2+k^2-r^2$ في المعادلة ونحصل على

$$x^2+y^2+Ax+By+C=0$$ المعادلة العامة للدائرة

حيث : $h=\frac{-A}{2}$ ، $k=\frac{-B}{2}$ ، $r^2=h^2+k^2-C>0$

$\therefore r=\sqrt{h^2+k^2-C}$

ملاحظة: من المعادلة العامة للدائرة نلاحظ ما يلي :

(1) معادلة من الدرجة الثانية للمتغيرين x,y

2) معامل x^2 = معامل y^2 ويفضل أن يكون = 1

3) المعادلة خالية من الحد الذي يحتوي xy

4) $r>0$ ودائماً $\sqrt{h^2+k^2-c}>0$

مثال 1/ أي المعادلات الآتية يمثل معادلة دائرة :

a) $x^3+y^3-2x+6y-9=0$

لا تمثل معادلة دائرة لأنها معادلة من الدرجة الثالثة

b) $3x^2-3y^2-2x+6y-19=0$

لا تمثل معادلة دائرة لأن معامل $x^2 \neq$ معامل y^2

c) $x^2+y^2-5xy-2x+6y-19=0$

لا تمثل معادلة دائرة لأن احد حدودها يحوي xy

d) $x^2+y^2-2x+6y+19=0$

المركز $C(h,k)=\left(\frac{-A}{2},\frac{-B}{2}\right)=\left(\frac{-(-2)}{2},\frac{-6}{2}\right)=(1,-3)$

$\therefore r=\sqrt{h^2+k^2-c}=\sqrt{1+9-19}=\sqrt{-9}\notin R$

$\therefore$ المعادلة لا تمثل معادلة دائرة

e) $x^2+y^2-2x+6y-19=0$

المركز $C(h,k)=\left(\frac{-A}{2},\frac{-B}{2}\right)=\left(\frac{2}{2},\frac{-6}{2}\right)=(1,-3)$

$r=\sqrt{h^2+k^2-c}=\sqrt{1+9+19}=\sqrt{29}\in R$

$\therefore$ المعادلة تمثل معادلة دائرة .

مثال 2/ جد احداثيات مركز الدائرة ونصف قطرها التي معادلتها :

$2x^2+2y^2+12x-8y+6=0$

الحل/ نجعل معامل x^2 = معامل y^2 = 1 وذلك نقسم المعادلة على 2

$x^2+y^2+6x-4y+3=0$

المركز $C\left(\frac{-A}{2},\frac{-B}{2}\right)=\left(\frac{-6}{2},-\frac{(-4)}{2}\right)=(-3,2)$

$r=\sqrt{h^2+k^2-c}=\sqrt{9+4-3}=\sqrt{10}$

نصف القطر $\therefore r=\sqrt{10}$ units

مثال 3/ اكتب المعادلة العامة للدائرة التي مركزها $c(1,-3)$ ، $r=2$ وحدات .

الحل/

$$c(h,k)=\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right) \Rightarrow h=-\frac{A}{2} \quad , \quad k=\frac{-B}{2}$$

$$\therefore A=-2h=-2\times 1=-2 \quad , \quad B=-2k=-2\times(-3)=6$$

$$r=\sqrt{h^2+k^2-c} \Rightarrow 2=\sqrt{1+9-c} \quad \text{وبالتربيع}$$

$$4=10-c \Rightarrow c=6$$

$$\therefore x^2+y^2+Ax+By+C=0 \quad \text{المعادلة العامة}$$

$$\therefore x^2+y^2-2x+6y+6=0 \quad \text{المعادلة}$$

وطريقة اخرى لايجاد المعادلة العامة $(x-1)^2+(y+3)^2=4$

وبفك الاقواس $x^2-2x+1+y^2+6y+9=4 \Rightarrow$

المعادلة العامة $x^2+y^2-2x+6y+6=0$

مثال 4/ جد معادلة الدائرة التي تمر بالنقطتين $P_1(1,-2)$ ، $P_2(4,-3)$ ويقع مركزها على محور الصادات .

الحل/ بما ان الدائرة يقع مركزها على محور الصادات فان: المركز $c(0,k)$

$$\therefore r_1=P_1C=\sqrt{(0-1)^2+(k+2)^2}=\sqrt{1+(k+2)^2}$$

$$r_2=P_2C=\sqrt{(0-4)^2+(k+3)^2}=\sqrt{16+(k+3)^2}$$

$$\therefore r_1=r_2 \quad \text{انصاف الاقطار متساوية}$$

$$\therefore \sqrt{1+(k+2)^2}=\sqrt{16+(k+3)^2} \quad \text{وبالتربيع للطرفين}$$

$$1+k^2+4k+4=16+k^2+6k+9 \Rightarrow 2k=-20 \Rightarrow k=\frac{-20}{2}=-10$$

$$\therefore c(0,-10) \Rightarrow r=\sqrt{1+(-10+2)^2}=\sqrt{65}\ \text{units} \quad \text{نصف القطر}$$

$$\therefore x^2+(y+10)^2=65 \quad \text{المعادلة القياسية للدائرة}$$

مثال 5/ جد معادلة الدائرة التي تمر بالنقط $P_1(0,0)$ ، $P_2(2,0)$ ، $P_3(3,-1)$

الحل/ المعادلة العامة للدائرة $x^2+y^2+Ax+By+C=0$

$P_1(0,0)$ تحقق المعادلة العامة $0+0+A(0)+B(0)+C=0 \Rightarrow \boxed{C=0}$

$P_2(2,0)$ تحقق المعادلة العامة $(2)^2+(0)^2+2A+B(0)+0=0 \Rightarrow$

$$2A=-4 \Rightarrow \boxed{A=-2}$$

$P_3(3,-1)$ تحقق المعادلة العامة $(3)^2+(-1)^2+3A+B(-1)+0=0$

$$9+1+3A-B=0 \Rightarrow 10+3(-2)-B=0 \Rightarrow \boxed{B=4}$$

∴ المعادلة العامة هي :

$\therefore x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$

مثال 6/ جد معادلة الدائرة التي تمر بالنقطتين $P_1(2,1)$ ، $P_2(-1,1)$ ويقع مركزها على المستقيم الذي معادلته $2x - 4y - 5 = 0$

الحل/ المعادلة العامة للدائرة $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$

$P_1(2,1)$ تحقق المعادلة $4 + 1 + 2A + B + C = 0$

$\therefore 5 + 2A + B + C = 0 \quad \text{----} \ (1)$

$P_2(-1,1)$ تحقق المعادلة $1 + 1 - A + B + C = 0$

$2 - A + B + C = 0 \quad \text{----} \ (2)$

وبطرح (2) من (1)

$5 + 2A + B + C = 0$

$\mp 2 \pm A \mp B \mp C = 0$

$3 + 3A = 0 \Rightarrow A = -1$

مركز الدائرة $C\left(\frac{-A}{2}, \frac{-B}{2}\right)$ يحقق معادلة المستقيم لأنه يقع على المستقيم

$\therefore 2x - 4y - 5 = 0 \Rightarrow 2\left(\frac{-A}{2}\right) - 4\left(\frac{-B}{2}\right) - 5 = 0$

بتعويض قيمة A في المعادلة $\therefore -A + 2B - 5 = 0 \Rightarrow -(-1) + 2B - 5 = 0$

$\Rightarrow 2B = 4 \Rightarrow B = 2$

∴ نعوض A ، B في المعادلة (1) ينتج $5 + 2(-1) + 2 + C = 0$

$\therefore 5 - 2 + 2 + C = 0$

$\therefore C = -5$

∴ المعادلة $x^2 + y^2 - x + 2y + 5 = 0$

صورة دائرة تحت تأثير التحويلات الهندسية :

اولاً: الانعكاس (Reflection) :

صورة انعكاس النقطة $p(x,y)$ على محور السينات $(x-axis)$ أي المستقيم $y=0$ يساوي $p'(x,-y)$.

وصورة انعكاسها على محور الصادات $(y-axis)$ أي المستقيم $x=0$ يساوي $p'(-x,y)$

ولايجاد صورة الدائرة تحت تأثير الانعكاس نجد المركز $C(h,k)$ من معادلة الدائرة ثم نجد نصف القطر ثم نجد انعكاس المركز على المحور المطلوب ونكتب

معادلة الدائرة التي تمثل صورة الدائرة بالانعكاس.

مثال/

اوجد صورة الدائرة التي معادلتها $x^2+y^2-4x+2y-4=0$ بالانعكاس على:

① $x-axis$ محور السينات

② $y-axis$ محور الصادات

الحل: ① من معادلة الدائرة نجد المركز ونصف القطر ونجد صورة المركز بالانعكاس على محور السينات

$\therefore c(h,k)=\left(\frac{-A}{2},\frac{-B}{2}\right)=\left(\frac{4}{2},\frac{-2}{2}\right)=(2,-1)$

$\therefore C(2,-1)$ المركز

$r=\sqrt{h^2+k^2-c}=\sqrt{4+1+4}=\sqrt{9}=3$ units نصف القطر

$c(2,-1)\longrightarrow \acute{c}(2,1)$ صورة المركز

$\therefore (x-h)^2+(y-k)^2=r^2 \Rightarrow (x-2)^2+(y-1)^2=9$ صورة الدائرة

② نجد صورة الدائرة بالانعكاس على محور الصادات ($y-axis$)

$c(2,-1)\longrightarrow \acute{c}(-2,-1)$ صورة المركز بالانعكاس

$\therefore (x+2)^2+(y+1)^2=9$ صورة الدائرة

ثانياً: الانسحاب: (Translation) هو التحويل الهندسي الذي ينقل النقطة P_1 الى النقطة P_2 حيث $P_2 \neq P_1$ نقطتان تقعان على المستوي وان P_1P_2 تساوي مسافة الانسحاب من P_1 الى P_2 وفي اتجاه معلوم والانسحاب أما:

① في الاتجاه الموجب الموازي لمحور السينات فنضيف عدد الوحدات المسحوبة على h فيصبح المركز $c(h,k)$ بالشكل $\acute{c}(h+d,k)$ حيث d عدد الوحدات المسحوبة

② في الاتجاه السالب الموازي لمحور السينات فالمركز يصبح $\acute{c}(h-d,k)$ اي نطرح من h مسافة الوحدات المسحوبة d.

③ في الاتجاه الموجب الموازي لمحور الصادات يضاف d الى k فيصبح المركز $\acute{c}(h,k+d)$

④ في الاتجاه السالب الموازي لمحور الصادات نطرح d من k فيصبح المركز $\acute{c}(h,k-d)$

فالناتج النهائي للمركز $\acute{c}$ ونصف القطر r نكتب صورة معادلة الدائرة.

مثال/ اوجد صورة الدائرة $x^2+y^2-2x+6y+6=0$ بانسحاب 5 وحدات

اولاً: بالاتجاه الموجب لمحور السينات

ثانياً: بالاتجاه السالب لمحور الصادات

الحل/ اولاً: نجد المركز ونصف القطر من معادلة الدائرة :

المركز $c(\frac{-A}{2}, \frac{-B}{2}) = c(\frac{2}{2}, \frac{-6}{2}) = c(1,-3)$

نصف القطر $r = \sqrt{h^2+k^2-c} = \sqrt{(1)+(-3)^2-6} = \sqrt{4} = 2$ units

صورة المركز $c(1,-3) \longrightarrow c'(1+5,-3) = c'(6,-3)$

صورة معادلة الدائرة بالانسحاب 5 وحدات $\therefore (x-6)^2+(y+3)^2=4$

ثانياً: صورة المركز $c(1,-3) \longrightarrow c'(1,-3-5) = c'(1,-8)$

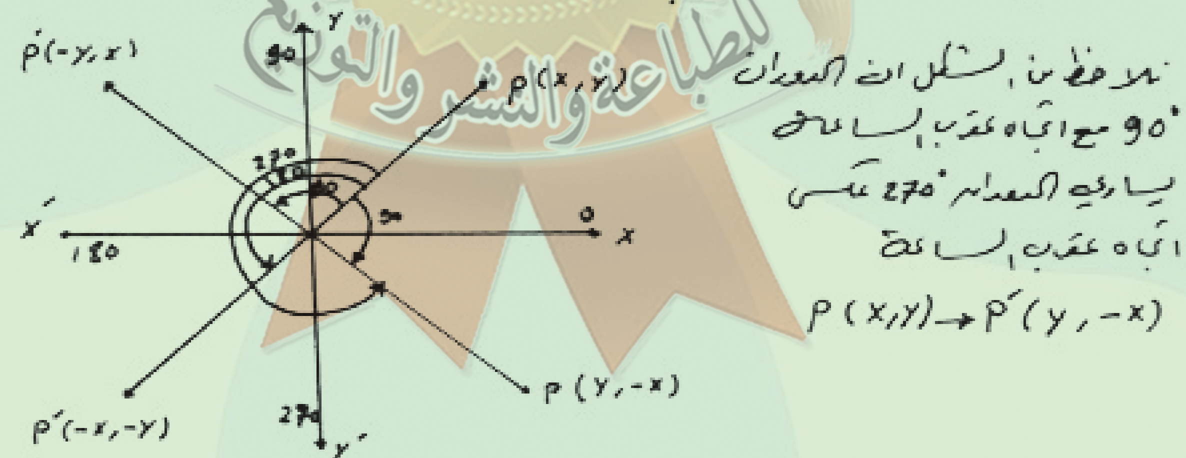
صورة معادلة الدائرة بالانسحاب 5 وحدات $\therefore (x-1)^2+(y+8)^2=4$

ثالثاً: الدورانات (Rotation)

ⓐ صورة النقطة $p(x,y)$ بالدوران $90°$ عكس اتجاه عقرب الساعة هي $p'(-y,x)$

ⓑ صورة النقطة $p(x,y)$ بالدوران $90°$ مع اتجاه عقرب الساعة هي $p'(y,-x)$

ⓒ صورة النقطة $p(x,y)$ بالدوران $180°$ (نصف دورة) هي $p'(-x,-y)$



نلاحظ من الشكل ان الدوران $90°$ مع اتجاه عقرب الساعة يساوي الدوران $270°$ عكس اتجاه عقرب الساعة

$p(x,y) \to p'(y,-x)$

مثال/ اوجد صورة الدائرة $x^2+y^2-10x-4y-20=0$ لكل من الدورانات:

اولاً: حول نقطة الأصل وبزاوية $90°$ باتجاه عكس عقارب الساعة .

المركز $c(h,k) = c(\frac{-A}{2}, \frac{-B}{2}) = c(\frac{10}{2}, \frac{4}{2}) = c(5,2)$

نصف القطر $r = \sqrt{h^2+k^2-c} = \sqrt{25+4+20} = \sqrt{49} = 7$ units

صورة المركز Rotation $(5,2) = (-2,5)$

المعادلة القياسية للدائرة $\therefore (x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

صورة معادلة الدائرة $\therefore (x+2)^2+(y-5)^2=49$

ثانياً: حول نقطة الأصل وبزاوية 180° باتجاه عكس عقارب الساعة (نصف دورة)

$Rotation(5,2)=(-5,-2)$ صورة المركز

$\therefore (x+5)^2+(y+2)^2=49$ صورة معادلة الدائرة

ثالثاً: الدوران حول نقطة الأصل وبزاوية 270° عكس اتجاه عقارب الساعة.

الدوران 270° عكس عقرب الساعة = 90° مع اتجاه عقارب الساعة.

$\therefore Rotation(5,2)=(2,-5)$

$\therefore (x-2)^2+(y+5)^2=49$ صورة معادلة الدائرة

رابعاً: التكبير (Dilation):

التكبير الذي مركزه (o) ومعامله $k>0$ هو تحويل هندسي تكون فيه صورة النقطة $p(x,y)$ على الصورة $p'(kx,ky)$

فإذا كان $k>1$ فهو تكبير وإذا كانت $0<k<1$ فهو تصغير وأن:

صورة نصف القطر بعد التكبير تصبح $r'=r.k$

مثال: اوجد صورة الدائرة $x^2+y^2-8x+8y+16=0$ تحت تأثير تكبير مركزه (o) ومعامله (3).

الحل/ من معادلة الدائرة نجد المركز ونصف القطر

$c\left(\frac{-A}{2},\frac{-B}{2}\right)=c\left(\frac{8}{2},\frac{-8}{2}\right)=c(4,-4)$ المركز

$r=\sqrt{h^2+k^2-c}=\sqrt{16+16-16}=4$ units نصف القطر

ولنفرض ان r' هو صورة نصف قطر الدائرة r وبما ان التكبير يحافظ على نسب الابعاد:

$\therefore r'=r.k=(4).(3)=12$ units صورة نصف القطر

$Dilation(4,-4)=(3\times4,3\times(-4))=(12,-12)$ صورة المركز

$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ بعد التكبير

$\therefore (x-12)^2+(y+12)^2=144$ تمثل صورة معادلة الدائرة بعد التكبير.

علاقة النقطة ومستقيم بالدائرة :

① علاقة النقطة بالدائرة Relation Between a point and circle

تعريف الدائرة بلغة المجموعات هي: $circle = \{p : pc = r \quad r > 0\}$

حيث p نقطة تنتمي للمستوي و c هي مركز الدائرة نجد المسافة pc

وان r هي نصف قطر الدائرة $pc = \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2}$

فاذا كان $pc = r$ فان النقطة $p(x,y)$ تقع على الدائرة

واذا كان $pc > r$ فان النقطة $p(x,y)$ تقع خارج الدائرة

واذا كان $pc < r$ فان النقطة $p(x,y)$ تقع داخل الدائرة .

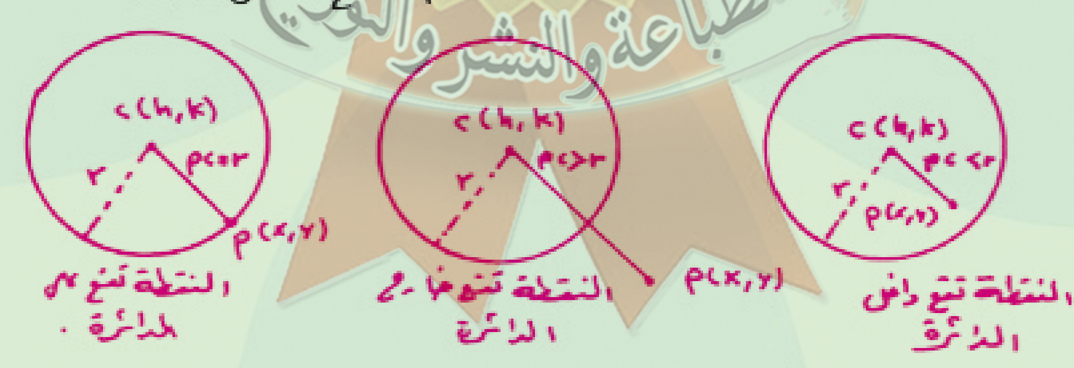
مثال : لتكن $x^2 + y^2 = 36$ معادلة دائرة بين موقع النقطة $p(4,-3)$ بالنسبة للدائرة .

$c(0,0)$ مركز الدائرة $\quad r = \sqrt{36} = 6$ units

$pc = \sqrt{(4-0)^2 + (-3-0)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$ units

$\therefore pc = 5 < 6 \Rightarrow pc < r$

$\therefore p(4,-3)$ تقع داخل الدائرة



② علاقة المستقيم بالدائرة Relation Between a line and circle

c(h,k) ⓐ المستقيم قاطع للدائرة

c(h,k) ⓑ المستقيم مماس للدائرة

c(h,k) ⓒ المستقيم ليس له علاقة بالدائرة

ⓐ اذا اشترك المستقيم مع الدائرة بنقطتين سمي المستقيم قاطع للدائرة

ⓑ اذا اشترك المستقيم مع الدائرة بنقطة واحدة سمي المستقيم مماس للدائرة .

ⓒ اذا لم يشترك المستقيم مع الدائرة بنقطة فان المستقيم ليس له علاقة بالدائرة

لتعيين المستقيم وعلاقته بالدائرة نجد المسافة بين المستقيم ومركز الدائرة حسب القانون للمسافة :

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

فإذا كان $r = d$ فالمستقيم مماس للدائرة

وإذا كان $r > d$ فالمستقيم قاطع للدائرة

وإذا كان $r < d$ فالمستقيم ليس له علاقة بالدائرة

مثال/

بين علاقة المستقيم $x - y + 2 = 0$ بالنسبة للدائرة التي معادلتها $x^2 + y^2 + 4x + 2y - 4 = 0$

الحل/ نجد مركز الدائرة ونصف القطر

المركز $c(h,k) = c\left(\frac{-A}{2}, \frac{-B}{2}\right) = c\left(\frac{-4}{2}, \frac{-2}{2}\right) = c(-2,-1)$

نصف القطر $r = \sqrt{h^2 + k^2 - c} = \sqrt{4+1+4} = \sqrt{9} = 3$ units

المسافة بين المركز والمستقيم $d = \frac{|1(-2) - 1(-1) + 2|}{\sqrt{(1)^2 + (-1)^2}} = \frac{|-2-1+2|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ units

$\because 3 > \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow r > d$ $\therefore$ المستقيم قاطع للدائرة

معادلة مماس الدائرة عند نقطة :

توجد طريقتان لإيجاد معادلة مماس الدائرة

هناك طريقتان :-

① **الطريقة الأولى :** اذا علم نقطتان من المستقيم $P_1(x_1,y_1)$ ، $P_2(x_2,y_2)$ فالمعادلة :

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

② **الطريقة الثانية :** اذا علم ميل المماس m ونقطة $p(x_1,y_1)$ فالمعادلة :

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

حيث m ميل المماس (slope) وميل العمود على المماس من نقطة التماس هي مقلوب ميل المماس وعكس الاشارة .

والميل يكون ايضاً ايجاده من معادلة المستقيم $Ax + By + c = 0$

$$m = \frac{-A}{B} = -\frac{\text{معامل } x}{\text{معامل } y}$$

كذلك الميل للمماس الذي يصنع زاوية موجبة مع محور السينات θ فانه $m = \tan\theta$

ملاحظة: اذا توازى مستقيمان فإن ميلاهما متساوي وبالعكس
اذا تعامد مستقيمان فإن حاصل ضرب ميلاهما (−1) وبالعكس .

مثال/ أوجد معادلة مماس الدائرة $x^2+y^2=5$ عند النقطة $p(1,2)$

الحل/

$x^2+y^2=5 \Longrightarrow c(0,0)$ المركز

$m_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{2-0}{1-0}=2$ ميل نصف القطر

وبما ان المماس عمودي على نصف القطر من نقطة التماس

$\therefore m=-\frac{1}{2}$ ميل المماس

$\therefore y-y_1=m(x-x_1)$ معادلة المماس

$[\ y-2=-\frac{1}{2}(x-1)\ ] \times 2$

$2y-4=-x+1 \Longrightarrow x+2y-5=0$ معادلة المماس

مثال/ جد معادلة المستقيم المماس للدائرة في كل حالة :

اولاً : $m=3$ ويمس الدائرة بالنقطة $p(2,3)$

الحل/

$y-y_1=m(x-x_1)$

$y-3=3(x-2)$

$y-3=3x-6$

$y-3x+3=0$ معادلة المماس

او $3x-y-3=0$

ثانياً : المماس // المستقيم $4x-2y+1=0$ ويمس الدائرة بالنقطة $p(1,2)$

الحل/ ميل المستقيم المعلوم $m=\frac{-A}{B}=-\frac{4}{-2}=2$

ميل المستقيم = ميل المماس (متوازيان)

$\therefore m=2$ ميل المماس

$y-y_1=m(x-x_1)$

$y-2=2(x-1)$

$y-2=2x-2$

$\therefore 2x-y=0$ معادلة المماس

تمارين (1 - 4)

① بين أي من المعادلات الآتية تمثل معادلة دائرة :

ⓐ $x^2 + 3y^2 - 2x + 3y = 0$

لا تمثل معادلة دائرة لأن معامل $x^2 \neq$ معامل y^2 .

ⓑ $x^2 + y^2 + 4x - 6y = 12 \Rightarrow x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 = 0$

تمثل معادلة دائرة .

ⓒ $x^2 + y^2 + 2xy = 1$

لا تمثل معادلة دائرة لاحتوائها حد يحتوي على xy

ⓓ $x^2 + y^2 = 0$

لا تمثل معادلة دائرة لأن نصف القطر $r = 0$

ⓔ $y = -2x$

لا تمثل معادلة دائرة لأن المعادلة خالية من x^2, y^2 وهي تمثل معادلة مستقيم

---

② جد معادلة الدائرة في كل حالة من الحالات الآتية :

أ. مركزها $c(3,-2)$ ونصف قطرها 5 وحدات

الحل/

$c(3,-2) = c(h,k) \qquad r = 5$

$(x-h)^2 - (y-k)^2 = r^2$ المعادلة القياسية

$\therefore (x-3)^2 + (y+2)^2 = 25$ معادلة الدائرة

ب. مركزها نقطة الأصل وتمر بالنقطة $p(-4,3)$.

الحل/

$c(h,k) = c(0,0)$

$r = pc = \sqrt{(0+4)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{25}$ نجد نصف القطر r حيث

$\therefore r = 5$ units نصف القطر

$\therefore x^2 + y^2 = 25$ معادلة الدائرة

ج. مركزها $c(-1,5)$ وتمر بالنقطة $p(4,3)$

الحل/

$r = \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = \sqrt{(4+1)^2 + (3-5)^2}$

$= \sqrt{25+4} = \sqrt{29}$

$\therefore r = \sqrt{29}$ units نصف القطر

$\therefore (x+1)^2 + (y-5)^2 = 29$ معادلة الدائرة

③ جد معادلة الدائرة التي نهايتي قطرها $P_1(2,-3)$ ، $P_2(4,1)$ بثلاث طرق مختلفة .

الحل/ اولاً: نجد منتصف $\overline{P_1P_2}$ وهو مركز الدائرة .

$$c(h,k) = \left(\frac{4+2}{2}, \frac{1-3}{2}\right) = (3,-1)$$ مركز الدائرة

$$r = P_1C = \sqrt{(2-3)^2+(-3+1)^2} = \sqrt{5} \text{ units}$$ نصف القطر

$$(x-3)^2 + (y+1)^2 = 5$$ معادلة الدائرة

ثانياً: حسب القاعدة

$$x^2+y^2 - x(x_1+x_2) - y(y_1+y_2) + x_1x_2 + y_1y_2 = 0$$

$$x^2+y^2 - x(2+4) - y(-3+1) + (2)(4) + (-3)(1) = 0$$

$$x^2+y^2 - 6x + 2y + 5 = 0$$ معادلة الدائرة

ثالثاً: بفرض نقطة $P_3(x,y)$ تقع على الدائرة فالمثلث $P_1P_2P_3$ سيصبح قائم الزاوية في P_3 . نطبق مبرهنة فيثاغورس

$$(P_1P_2)^2 = (P_1P_3)^2 + (P_2P_3)^2$$

$$\therefore (x-2)^2 + (y+3)^2 + (x-4)^2 + (y-1)^2 = (2-4)^2 + (-3-1)^2$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 + 6y + 9 + x^2 - 8x + 16 + y^2 - 2y + 1 = 4 + 16$$

$$2x^2 + 2y^2 - 12x + 4y + 30 = 20 \Rightarrow 2x^2 + 2y^2 - 12x + 4y + 10 = 0$$

$$\therefore x^2 + y^2 - 6x + 2y + 5 = 0$$ معادلة الدائرة

---

④ جد أحداثيات المركز ونصف قطر الدوائر الآتية :

ⓐ $(x+5)^2 + (y-4)^2 = 36$

$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ بالمقارنة مع المعادلة القياسية

$h = -5 \quad , k = 4 \qquad \therefore c(-5,4)$ مركز الدائرة

$r^2 = 36 \Rightarrow r = 6$ units نصف القطر

ⓑ $(x-2)^2 + y^2 = 9$

$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ بالمقارنة مع

$h = 2 \quad , k = 0 \qquad \therefore c(2,0)$ مركز الدائرة

$r^2 = 9 \Rightarrow r = 3$ units نصف القطر

ⓒ $2x^2 + 2y^2 + 3x + 4y = 0 \;\;] \div 2$

$x^2 + y^2 + \frac{3}{2}x + 2y = 0$

المركز $c\left(\frac{-A}{2}, \frac{-B}{2}\right) = \left(\frac{-3}{4}, -1\right)$

نصف القطر $r = \sqrt{h^2 + k^2 - c} = \sqrt{\frac{9}{16} + 1 - 0} = \sqrt{\frac{9+16}{16}} = \sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{5}{4}$ unit مكتفي

⑤ جد معادلة الدائرة التي تمس المستقيم $y=4$ ومركزها $c(-2,-3)$

الحل/ نصف القطر $r = |k - y_1| = |-3-4| = 7$ units

معادلة الدائرة $(x+2)^2 + (y+3)^2 = 49$



⑥ جد معادلة الدائرة التي تمس المحورين الإحداثيين وتمس المستقيم $y=6$.

الحل/ بما ان الدائرة تمس المحورين وتمس المستقيم $y=6$ فهي تقع في الربع الاول أو تقع في الربع الثاني .

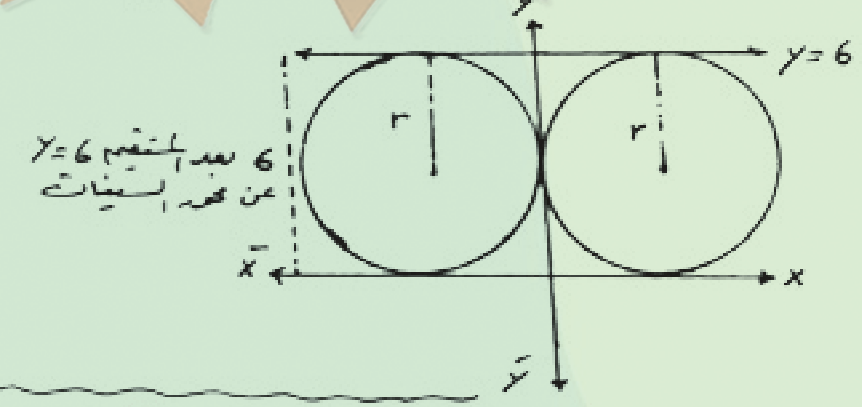
نصف القطر مكتفي $r = \frac{|6-0|}{2} = \frac{|6|}{2} = \frac{6}{2} = 3$

اذا وقعت الدائرة في الربع الاول فان: $r=3,\ c(3,3)$

معادلة الدائرة $\therefore (x-3)^2 + (y-3)^2 = 9$

اذا وقعت الدائرة في الربع الثاني فان: $r=3\ ,\ c(-3,3)$

معادلة الدائرة $\therefore (x+3)^2 + (y-3)^2 = 9$



⑦ جد معادلة الدائرة التي تمر بالنقطة $(-3,6)$ وتمس المحورين الاحداثيين .

الحل/ بما ان الدائرة تمس المحورين الاحداثيين وتمر بالنقطة $(-3,6)$ فهي تقع في الربع الثاني . حيث نصف القطر $= r$ والمركز $c(-r,r)$ لان $r = |h| = |k|$

$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ المعادلة القياسية

$\therefore (-3+r)^2+(6-r)^2=r^2$

$9-6r+r^2+36-12r+r^2=r^2 \Rightarrow r^2-18r+45=0$

$\therefore (r-15)(r-3)=0 \Rightarrow$ either $r-15=0 \Rightarrow r=15$ units نصف القطر مقبول

$\therefore c(-15,15)$ مركز الدائرة

or $r-3=0 \Rightarrow r=3$ units نصف القطر

$\therefore c(-3,3)$ مركز الدائرة

$\therefore (x+15)^2+(y-15)^2=225$ المعادلة الأولى.

$(x+3)^2+(y-3)^2=9$ المعادلة ثانياً.

---

(8) جد معادلة الدائرة التي نصف قطرها 5 وحدات وتمس المحورين الاحداثيين والواقعة:

اولاً : في الربع الثاني

الحل/ بما ان الدائرة تمس المحورين وتقع في الربع الثاني فانه : $r=|h|=|k|$

$r=5$, $c(-5,5)$ مركز الدائرة فان $c(-r,r)$

$\therefore (x+5)^2+(y-5)^2=25$ معادلة الدائرة

ثانياً : في الربع الرابع

الحل/ بما ان الدائرة تمس المحورين وتقع في الربع الرابع فان : $r=|h|=|k|$

$r=5$, $c(5,-5)$ مركز الدائرة فان $c(r,-r)$

$\therefore (x-5)^2+(y+5)^2=25$ معادلة الدائرة

ثالثاً : في الربع الاول

الحل/ بما ان الدائرة تمس المحورين وتقع في الربع الاول فانه : $r=|h|=|k|$

$r=5$, $c(5,5)$. مركز الدائرة فانه $c(r,r)$

$\therefore (x-5)^2+(y-5)^2=25$ معادلة الدائرة

---

(9) اكتب المعادلة العامة للدائرة التي مركزها $c(2,-3)$ ونصف قطرها 4 وحدات

الحل

$(x-2)^2+(y+3)^2=16$ المعادلة القياسية

$x^2-4x+4+y^2+6y+9=16$ وبفتح الاقواس والتبسيط

$x^2+y^2-4x+6y+4+9-16=0$

$\therefore x^2+y^2-4x+6y-3=0$ المعادلة العامة للدائرة

طريقة ثانية :

$h=\frac{-A}{2} \Rightarrow A=-2h=-2(2)=-4$

$k = \frac{-B}{2} \rightarrow B = -2k = -2(-3) = 6$

$r = \sqrt{h^2 + k^2 - c} \Rightarrow 4 = \sqrt{4 + 9 - c}$ بالتعويض

$16 = 13 - c \Rightarrow c = 13 - 16 = -3$

$x^2 + y^2 + Ax + By + c = 0$ الصيغة العامة للدائرة

$\therefore x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$ المعادلة العامة

---

⑮ جد معادلة الدائرة التي تمر بالنقطتين $P_1(3,-1)$ ، $P_2(5,1)$ ويقع مركزها على محور السينات .

الحل/ بما ان مركز الدائرة يقع على محور السينات فانه $c(h,k) = c(h,0)$

اي ان $k = 0$

نعوض $P_1(3,-1)$ في المعادلة القياسية للدائرة $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

$\therefore (3-h)^2 + (-1-0)^2 = r^2 \Rightarrow 9 - 6h + h^2 + 1 = r^2$ ---------①

نعوض $P_2(5,1)$ في المعادلة القياسية للدائرة

$(5-h)^2 + (1-0)^2 = r^2 \Rightarrow 25 - 10h + h^2 + 1 = r^2$ -------②

$① = ② \Rightarrow 9 - 6h + h^2 + 1 = 25 - 10h + h^2 + 1$

$10h - 6h = 25 + 1 - 9 - 1$

$4h = 16 \Rightarrow h = 4$ $\therefore c(4,0)$ المركز

نعوض $h = 4$ في المعادلة ① $9 - 6(4) + (4)^2 + 1 = r^2$

$\therefore r^2 = 2 \Rightarrow r = \sqrt{2}$ unit نصف القطر

$\therefore (x-4)^2 + y^2 = 2$ معادلة الدائرة

---

⑪ بين موقع النقاط $P_1(3,4)$ ، $P_2(2,-2)$ ، $P_3(-4,4)$ بالنسبة للدائرة التي معادلتها $x^2 + y^2 = 25$.

الحل/ نصف القطر $r = \sqrt{25} = 5$ unit المركز $c(h,k) = c(0,0)$

$P_1C = \sqrt{(3-0)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{25} = 5 = r$ $\therefore P_1$ تقع على الدائرة

$P_2C = \sqrt{(2-0)^2 + (-2-0)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} < r$ $\therefore P_2$ تقع داخل الدائرة

$P_3C = \sqrt{(-4-0)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} > r$ $\therefore P_3$ تقع خارج الدائرة

أو طريقة ثانية نعوض كل من P_1 ، P_2 ، P_3 في المعادلة تستنتج المساواة او عدم المساواة مع r .

⑫ جد معادلة الدائرة التي تمر بالنقاط $P_1(1,0)$ ، $P_2(0,1)$ ، $P_3(3,4)$

الحل/ نعوض $P_1(1,0)$ في المعادلة العامة للدائرة $x^2+y^2+Ax+By+C=0$

$1+0+A+0+C=0 \Rightarrow 1+A+C=0$ ---- ①

نعوض $P_2(0,1)$ في المعادلة العامة للدائرة

$0+1+0+B+C=0 \Rightarrow 1+B+C=0$ ---- ②

نعوض $P_3(3,4)$ في المعادلة العامة للدائرة

$9+16+3A+4B+C=0 \Rightarrow 25+3A+4B+C=0$ ---- ③

نطرح ② من ①

$1+A+C=0$

$\mp 1 \mp B \mp C=0$

$A-B=0 \Rightarrow A=B$

ومن المعادلة ① نحصل على $C=-1-A$

نعوض عن B و C في المعادلة ③ نحصل على:

$25+3A+4A-1-A=0 \Rightarrow 6A+24=0 \Rightarrow 6A=-24$

$\therefore A=-4 \quad , B=-4 \quad , C=-1-(-4)=3$

$\therefore x^2+y^2-4x-4y+3=0$ معادلة الدائرة

---

⑬ اوجد معادلة المماس للدائرة $(x-3)^2+(y-2)^2=5$ عند النقطة $P(1,1)$

الحل/ بالمقارنة مع المعادلة القياسية $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

$h=3 \; , \; k=2 \quad \therefore C(3,2)$ المركز $\quad r=\sqrt{5}$ نصف القطر

نجد ميل نصف القطر حيث $m_{\overline{PC}}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{2-1}{3-1}=\dfrac{1}{2}$

$\therefore m_{\text{المماس}}=-2$ (لان نصف القطر والمماس متعامدان)

$P(1,1)=P(x_1,y_1)$

$\therefore y-y_1=m(x-x_1)$

$y-1=-2(x-1) \Rightarrow$

$y-1=-2x+2 \Rightarrow$

$2x+y-1-2=0 \Rightarrow$

$2x+y-3=0$ معادلة المماس

(14) أوجد معادلة مماس الدائرة $x^2+y^2=5$ ، العمودي على المستقيم الذي معادلته $2x-y=1$ عند النقطة التي احداثيها $y=1$.

الحل/ نجد ميل المستقيم المعلوم

$$m=\frac{-A}{B}=\frac{-\text{معامل } x}{\text{معامل } y}=\frac{-2}{-1}=2$$

$$m_{\text{المماس}}=-\frac{1}{2}$$ (لان المماس والمستقيم المعلوم متعامدان)

نجد نقطة التماس وذلك بتعويض $y=1$ في معادلة الدائرة:

$\therefore x^2+(1)^2=5 \Rightarrow x^2+1=5$

$\therefore x^2=4 \Rightarrow x=\mp 2$

$\therefore (2,1)\ ,\ (-2,1)$ نقطتي تماس

اذا كانت $(2,1)$ نقطة تماس فان:

$y-y_1=m(x-x_1)$

$y-1=-\frac{1}{2}(x-2)\ ]\times 2$

$2y-2=-x+2 \Rightarrow x+2y-4=0$ معادلة المماس

اذا كانت $(-2,1)$ نقطة تماس فان:

$y-1=-\frac{1}{2}(x+2)\ ]\times 2$

$2y-2=-x-2 \Rightarrow x+2y=0$ معادلة المماس

---

(15) اوجد صورة الدائرة $x^2+y^2+4x-2y-31=0$

اولاً: بالانعكاس على محور الصادات.

الحل/

$C(h,k)=C\left(\frac{-A}{2},\frac{-B}{2}\right)=C\left(\frac{-4}{2},\frac{2}{2}\right)$

$\therefore C(-2,1)$ المركز

$r=\sqrt{h^2+k^2-c}=\sqrt{(-2)^2+(1)^2+31}=\sqrt{36}=6$ units نصف القطر

Reflection $C(-2,1)=C'(+2,+1)$ صورة المركز بالانعكاس على محور الصادات

$\therefore (x-2)^2+(y-1)^2=36$ صورة معادلة الدائرة بالانعكاس على محور الصادات

ثانياً: بدوران نصف دورة حول نقطة الاصل:

الحل/ Rotation$_{180°}$ $C(-2,1)=C'(2,-1)$ صورة المركز بالدوران 180°

$\therefore (x-2)^2+(y+1)^2=36$ صورة معادلة الدائرة بالدوران نصف دورة

ثالثاً: تحت تأثير تكبير مركزه (O) ومعامله $(\frac{1}{2})$

الحل/ Dilation $C(-2,1)=C'(-1,\frac{1}{2})$ صورة المركز بالتكبير

Dilation $r=6 \Rightarrow r'=|\frac{1}{2}|\times 6=3$ units صورة نصف القطر

صورة معادلة الدائرة بالتكبير $\therefore (x+1)^2 + (y-\frac{1}{2})^2 = 9$

رابعاً : بأسحاب 5 وحدات بالاتجاه السالب لمحور السينات :

الحل / صورة المركز $Translation\ c(-2,1) = c'(-2-5,1) = c'(-7,1)$

صورة معادلة الدائرة بالاسحاب $\therefore (x+7)^2 + (y-1)^2 = 36$

أسئلة اثرائية :

① جد معادلة الدائرة التي تمس محور السينات عند النقطة $(4,0)$ ومركزها ينتمي الخط المستقيم $x+2y+2=0$.

الحل / ∵ الدائرة تمس محور السينات عند النقطة $(4,0) \Leftarrow c(4,k)$

وبما ان المركز ينتمي للمستقيم $x+2y+2=0$ فهي تحقق معادلته

المركز $\therefore 4+2k+2=0 \Rightarrow k=-3 \Rightarrow c(4,-3)$

نصف القطر $r=|k|=|-3|=3$ units

معادلة الدائرة $\therefore (x-4)^2 + (y+3)^2 = 9$

---

② جد معادلة الدائرة التي تمس المستقيمين $x=3$ ، $x=-1$ وتمس محور السينات

الحل / نصف القطر $r = \frac{|x_2 - x_1|}{2} = \frac{|3-(-1)|}{2} = 2$ units

∵ الدائرة تمس محور السينات فان : $r=|k| \Rightarrow 2=|k| \Rightarrow k=\mp 2$

∵ الدائرة تمس المستقيم $x=3 \Leftarrow$ $r=|x_1-h|$

$\therefore 2=|3-h| \Rightarrow 3-h=\mp 2 \Rightarrow h=1$ or $h=5$ تهمل

لان $-1<h<3$

$\therefore c(1,2)$ or $c(1,-2)$

معادلة الدائرة $\therefore (x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$

معادلة الدائرة or $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$

اسئلة اثرائية : غير محلولة

① جد معادلة الدائرة التي تمس محور السينات والتي $\overline{P_1P_2}$ أحد أقطارها حيث $P_1(-1,2)$ ، $P_2(c,c+1)$

ج / $(x-3)^2 + (y-5)^2 = 25$ أما

او $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 1$

② أوجد معادلتي المماسين المرسومين للدائرة من $x^2+y^2-2x-2y-2=0$.

من النقطة $p(5,3)$. ج / $y-3=0$ ، $4x-3y-11=0$.

الفصل الخامس
chapter 5

الدوال الدائرية Circular Function

المصطلح	الرمز أو العلاقة الرياضية
الزاوية المنتسبة	$90^\circ n \mp \theta$
قانون الجيب تمام	$A'^2 = B'^2 + C'^2 - 2B'C' \cos A$
قانون الجيب	$\frac{A'}{\sin A} = \frac{B'}{\sin B} = \frac{C'}{\sin C}$

التطبيق اللاف :- The winding mapping

وهو التطبيق الذي يقرن أي عدد حقيقي بنقطة من دائرة الوحدة (او بزاوية موجهة بالوضع القياسي) يسمى التطبيق اللاف .

ففي الشكل المجاور النقطة المثلثية للزاوية $\overrightarrow{AOB}$ هي A وهي تقاطع الضلع النهائي للزاوية مع دائرة الوحدة .

∴ A تقع على الجزء الموجب لمحور $\overleftrightarrow{X}$ وان $r=1$ نصف القطر

وعليه النقطة هي $A(1,0)$ ، $\therefore 0 A$

وفي الشكل المجاور النقطة المثلثية $\overrightarrow{COD}$ هي D وهي نقطة تقاطع الضلع النهائي للزاوية مع دائرة الوحدة

∴ D تقع على الجزء الموجب من المحور $\overleftrightarrow{Y}$ وعليه $D=(0,1)$

كذلك النقطة L هي نقطة تقاطع الضلع النهائي للزاوية المثلثية $\overrightarrow{HOL}$ مع دائرة الوحدة

∴ L تقع على الجزء السالب لمحور $\overleftrightarrow{X}$ ، وعليه $L(-1,0)$

كذلك النقطة M هي النقطة المثلثية للزاوية $\overrightarrow{LOM}$ وعليه $M(0,-1)$.

وبشكل عام النقطة المثلثية لاي زاوية موجهة بالوضع القياسي θ هي نقطة تقاطع الضلع النهائي للزاوية الموجهة بالوضع القياسي مع الدائرة مثل $N(x,y)$

النقطة المثلثية $N(x,y)=(\cos\theta, \sin\theta)$

$x=\cos\theta \ , \quad y=\sin\theta$

حيث $-1 \leq \cos\theta \leq 1$ ، $-1 \leq \sin\theta \leq 1$

تعريف: الجيب (Sine) دالة مجالها R ومجالها المقابل [-1,1] بحيث:

$$\forall \theta \in R : \quad \sin\theta = y$$

حيث y الاحداثي الصادي للنقطة المثلثية.

جيب تمام (cosine) دالة مجالها R ومجالها المقابل [-1,1] بحيث:

$$\forall \theta \in R : \quad \cos\theta = x$$

حيث x الاحداثي السيني النقطة المثلثية.

القياس الرئيس للزاوية:

ان أية زاوية موجهة بالوضع القياسي تقترن بمجموعة غير منتهية من الاعداد يمثل كل منها قياساً لهذه الزاوية والقياس الرئيس للزاوية يحقق العبارة التالية: $0 \leq \theta < 2\pi$ بالقياس الدائري.

او $0 \leq \theta < 360^\circ$ بالقياس الستيني

وهذا القياس يعتبر وحيد وبقية القياسات تنتج باضافة $2k\pi$ حيث k عدد صحيح الى القياس الرئيس او اضافة $360^\circ k$ للقياس الرئيس للزاوية θ

$$Angle = 2k\pi + \theta$$

مثال 1 اوجد القياس الرئيس لكل من الزوايا الآتية:

a) 8.75π , b) 66 c) 30π

الحل/

a) $8.75\pi = 8\pi + 0.75\pi$

لكن $0.75\pi = \frac{3}{4}\pi$

∴ القياس الرئيس للزاوية (8.75π) هو ($\frac{3}{4}\pi$)

ملاحظة: اذا اعطي قياس الزاوية بالدائري وكان قياسها اكبر من 2π فنجزأ الزاوية الى عدد زوجي من π + الباقي من الزاوية. والباقي هو القياس الرئيس كما سبق.

b) $66 = 66 \times \frac{7}{22}\pi = 21\pi = 20\pi + \pi$

∴ القياس الرئيس للزاوية (66) هو (π)

ملاحظة: اذا اعطي القياس الدائري بدون π كما سبق فنضرب الزاوية $\times \frac{7}{22}\pi$ فالناتج يجزأ كما في (a).

c) $30\pi = 30\pi + 0$ ∴ القياس الرئيس للزاوية 30π هو (0)

مثال 2 احسب $\sin\left(\frac{-7\pi}{2}\right)$

الحل/ نجد القياس الرئيسي للزاوية $\left(\frac{-7\pi}{2}\right)$ ولاحظ عزيزي الطالب القياس الرئيسي للزاوية يجب ان يكون موجب.

$\therefore -\frac{7}{2}\pi = -4\pi + \frac{\pi}{2}$

$\therefore$ القياس الرئيسي للزاوية $\left(\frac{-7\pi}{2}\right)$ هو $\frac{\pi}{2}$

$\therefore \sin\left(\frac{-7\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

ملاحظة: أقسم -7π على 2 يجب ان يكون ناتج القسمة عدد زوجي والباقي عدد زوجي

$2 \overline{)\,-7\pi\,}$ ناتج القسمة -4π، بالطرح $\pm 8\pi$ يبقى π

$\therefore$ الباقي $\frac{\pi}{2}$ وهو يعتبر القياس الرئيسي.

تمارين (1-5)

① جد القياسات الرئيسية لكل من الزوايا التي قياساتها الآتية

ⓐ $21\pi = 20\pi + \pi$ $\therefore$ القياس الرئيسي $= \pi$

ⓑ $\frac{-15}{2}\pi = -8\pi + \frac{\pi}{2}$

$2 \overline{)\,-15\pi\,}$ ناتج القسمة -8π، بالطرح $\pm 16\pi$ يبقى π

$\therefore$ القياس الرئيسي للزاوية $\left(\frac{-15\pi}{2}\right)$ هو $\left(\frac{\pi}{2}\right)$

② جد الاعداد الحقيقية الآتية:

ⓐ $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ⓑ $\cos\frac{19\pi}{6}$

اولاً نجد القياس الرئيسي للزاوية $\frac{19\pi}{6}$ ⟸ $\frac{19}{6}\pi = 2\pi + \frac{7\pi}{6}$

$\therefore$ القياس الرئيسي $= \frac{7\pi}{6}$

$\frac{7\pi}{6} = 210°$ في الربع الثالث

$\therefore \cos\frac{19\pi}{6} = \cos\frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

ⓒ $\cos 24\pi = \cos(24\pi + 0) = \cos 0 = 1$ لان القياس الرئيسي $= 0$

اسئلة اثرائية: ① جد القياسات الرئيسية لكل من الزوايا:

ⓐ $-500° = -500 + 720° = 220°$ القياس الرئيسي

ⓑ $1030^\circ + (-2)\times 360^\circ = 1030^\circ - 720^\circ = 210^\circ$ ∴ النتيجة الرئيسي $= 210^\circ$

ⓒ $\frac{23}{2}\pi = 10\pi + \frac{3\pi}{2}$

∴ القياس الرئيسي للزاوية $= \frac{3\pi}{2}$.

ⓓ $-\frac{17\pi}{3}$ ⓔ $\frac{17\pi}{4}$ (واجب)

2) جد الاعداد الحقيقية (واجب) ⓐ $\cos(\frac{17\pi}{4})$, ⓑ $\sin(21\pi)$

دالة الظل : (tangent) وتكتب اختصاراً tan

يمكن ان نحصل على هذه الدالة من دائرة الوحدة . وذلك لو وضعنا مستقيماً مدرجاً على جميع الاعداد الحقيقية بحيث يكون مماساً للدائرة عند النقطة $A(1,0)$ وكما في الشكل (طريقة عملية لايجاد الظل) .

ويشترط ان يكون العدد صفر منطبقاً على A فان نقطة تقاطع الضلع النهائي للزاوية θ مع هذا الخط يمثل $\tan\theta$.

تعريف : دالة الظل : tan

$$\tan : \{\theta : \theta \in R \ , \ \cos\theta \neq 0\} \longrightarrow R$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

لاحظ ان دالة الظل (tan) ناتجة من قسمة $\sin\theta / \cos\theta$.

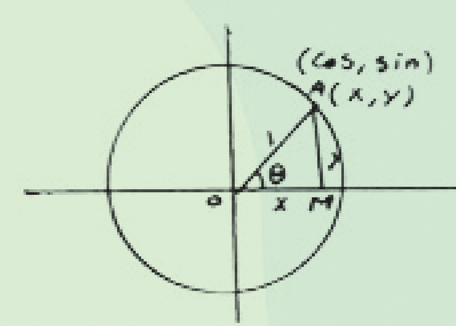
ملاحظات :

① $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ فان الزاوية θ تقع في الربع الاول وتكون النقطة المثلثية $(x,y) = (\cos\theta, \sin\theta)$ حيث $\sin\theta > 0$ ، $\cos\theta > 0$ فيكون $\tan\theta > 0$

② $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ فان الزاوية θ تقع في الربع الثاني وتكون النقطة المثلثية $(-x,y) = (-\cos\theta, \sin\theta)$ حيث $\sin\theta > 0$ ، $\cos\theta < 0$. فيكون $\tan\theta < 0$

③ $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ فان الزاوية θ تقع في الربع الثالث وتكون النقطة المثلثية $(-x,-y) = (-\cos\theta, -\sin\theta)$ حيث $\sin\theta < 0$ ، $\cos\theta < 0$ فيكون $\tan\theta > 0$

④ $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$ فان الزاوية θ تقع في الربع الرابع وتكون النقطة المثلثية $(x,-y) = (\cos\theta, -\sin\theta)$ حيث $\sin\theta < 0$ ، $\cos\theta > 0$. فيكون $\tan\theta < 0$



في المثلث القائم الزاوية AOM في O

فيثاغورس $x^2 + y^2 = 1$

وحيث ان $x = \cos\theta$, $y = \sin\theta$

من النقطة المثلثية يليه

علاقة مهمة جداً: $\boxed{\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1}$

مثال 3 جد $\tan\frac{5\pi}{3}$

الحل/

$$\tan\frac{5\pi}{3} = \frac{\sin\frac{5\pi}{3}}{\cos\frac{5\pi}{3}} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = -\sqrt{3} = -\sqrt{3}$$

مثال 4 اذا كانت θ هي قياس الزاوية الموجهة بالوضع القياسي وكانت $\sin\theta = \frac{3}{5}$ فأوجد قيمة $\cos\theta$ ، $\tan\theta$ علماً ان θ تقع في الربع الثاني.

الحل/

علاقة $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2\theta = 1 \Rightarrow \cos^2\theta = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$$

لان θ تقع في الربع الثاني $\therefore \cos\theta = \mp\frac{4}{5} \Rightarrow \cos = -\frac{4}{5}$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}$$

تمارين (2 - 5)

① اوجد $\sin x$ ، $\cos x$ ، $\tan x$ اذا علمت ان الضلع النهائي للزاوية (x) الموجهة في الوضع القياسي يقطع دائرة الوحدة في النقط المثلثية الآتية:

ⓐ $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$

$$\sin x = -\frac{2}{\sqrt{5}} \ , \ \cos x = \frac{1}{\sqrt{5}} \ , \ \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{-\frac{2}{\sqrt{5}}}{\frac{1}{\sqrt{5}}} = -2$$

ⓑ $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3} , \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$

$\sin x = \frac{\sqrt{6}}{3}$, $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{\sqrt{6}}{3}}{-\frac{\sqrt{3}}{3}} = -\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}$

$\therefore \tan x = -\sqrt{2}$

ⓒ $\left(\frac{1}{2} , \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos x = \frac{1}{2}$, $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

ⓓ $(0.6 , -0.8)$

$\sin x = -0.8$, $\cos x = 0.6$, $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{-0.8}{0.6} = -\frac{8}{6}$

---

② جد ما يأتي

ⓐ $\sin(30\pi) = \sin(30\pi + 0) = \sin 0 = 0$

ملاحظة: نجد القياس الرئيسي لكل زاوية حيث 0 القياس الرئيسي للزاوية 30π

ⓑ $\cos\left(-\frac{13\pi}{6}\right) = \cos\left(-4\pi + \frac{11\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ملاحظة: القياس الرئيسي هو $\frac{11\pi}{6}$

حيث $\frac{11\pi}{6}$ تقع في الربع الرابع ما يقابله الزاوية $2\pi - \frac{11\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$

ⓒ $\tan\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$

حيث $\frac{4\pi}{3}$ تقع في الربع الثالث [illegible] $\frac{4\pi}{3} = \pi + \frac{\pi}{3}$

ⓓ $\cos(30\pi) = \cos(30\pi + 0) = \cos 0 = 1$

---

③ جد قيمة ما يأتي:

ⓐ $\sin^2 3 + \cos^2 3 = 1$

ⓑ $\cos^2\frac{\pi}{6} - \sin^2\frac{\pi}{6} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2$

$= \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

ملاحظة: يوجد حل آخر وذلك بتطبيق العلاقة

$\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x \Rightarrow$ يحل السؤال بعد ذلك جيب تمام ضعف الزاوية.

---

④ تحقق مما يأتي:

$\sin\frac{\pi}{6} \cdot \cos\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{3} = \sin\frac{\pi}{2}$

الحل/

$L.H = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$

$R.H = \sin\frac{\pi}{2} = 1$ $\therefore L.H = R.H$

دوال دائرية اخرى : لقد تعرفت عزيزي الطالب على الدوال الدائرية وهي : sin ، cos ، tan أما الدوال الأخرى فهي مقلوبات هذه الدوال .

① **الدالة (ظل تمام)** cotangent : ويرمز لها cot وهي الدالة الناتجة من مقلوب الدالة الظل tan .

$$\cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{\cos x}{\sin x}$$

تعريف :

دالة ظل التمام : cot $\cot : \{\theta : \theta \in R , \sin\theta \neq 0\} \rightarrow R$

$$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

اي ان الدالة cot تعرف لكل الاعداد الحقيقية بشرط $(\sin\theta \neq 0)$

② **الدالة (قاطع)** secant : ويرمز لها sec وهي الدالة الناتجة من مقلوب الدالة (cos) أي ان $\sec x = \frac{1}{\cos x}$

تعريف :

دالة القاطع sec حيث

$$\sec : \{\theta : \theta \in R , \cos\theta \neq 0\} \rightarrow R$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$

③ **الدالة (قاطع تمام)** cosecant : ويرمز لها csc وهي الدالة الناتجة من مقلوب الدالة sin أي ان $\csc x = \frac{1}{\sin x}$

تعريف :

دالة قاطع التمام : $\csc\theta$ حيث

$$\csc : \{\theta : \theta \in R , \sin\theta \neq 0\} \rightarrow R$$

$$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$$

مثال 5 اذا كان $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ وكان $\sin x = \frac{5}{13}$ فجد كلاً من : $\csc x$ ، $\sec x$ ، $\cot x$ ، $\tan x$ ، $\cos x$.

الحل نطبق العلاقة الفيثاغورية $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$$\therefore \left(\frac{5}{13}\right)^2 + \cos^2 x = 1 \rightarrow \cos^2 x = 1 - \frac{25}{169} \rightarrow \cos^2 x = \frac{144}{169}$$

$\therefore \cos x = \mp\frac{12}{13}$ وبما ان x تقع في الربع الثاني فان :

$\cos x < 0$ سالبة $\Rightarrow \cos x = -\frac{12}{13}$

$\because \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

$\therefore \tan x = \frac{\frac{5}{13}}{-\frac{12}{13}} = -\frac{5}{12}$

$\because \cot x = \frac{1}{\tan x} \Rightarrow \cot x = -\frac{12}{5}$

$\because \sec x = \frac{1}{\cos x} \Rightarrow \sec x = -\frac{13}{12}$

$\because \csc x = \frac{1}{\sin x} \Rightarrow \csc x = \frac{13}{5}$

العلاقات بين الدوال الدائرية :

① $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad \forall x \in R$ (المتطابقة الفيثاغورية)

وبقسمة الطرفين على $\cos^2 x$ نحصل على :

② $\tan^2 x + 1 = \sec^2 x \quad , \forall x \; , x \neq (2n+1) \cdot \frac{\pi}{2}$ حيث n أي عدد صحيح

من العلاقة في ① وبقسمة الطرفين على $\sin^2 x$ نحصل على :

③ $1 + \cot^2 x = \csc^2 x \quad , \forall x \; , x \neq n\pi$ حيث n أي عدد صحيح

ملاحظة: عزيزي الطالب هذه العلاقات الثلاثة مهمة جداً جداً .

مثال 6 أثبت صحة المتطابقة الآتية :

$$\sec^2 x + \csc^2 x = \sec^2 x \csc^2 x \quad , \forall x \; , x \neq \frac{n\pi}{2}$$

حيث n عدد صحيح

الإثبات / الطرف الأيسر

$$L.H = \sec^2 x + \csc^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{1}{\sin^2 x} = \sec^2 x \cdot \csc^2 x$$

$\therefore L.H = R.H$. الطرف الأيمن = الطرف الأيسر

مثال 7 اثبت صحة المتطابقة الآتية :

$$\frac{3\cos^2 x - \sin^2 x + 1}{\sin^2 x} = 4\cot^2 x$$

الحل / علاقة

$$L.H = \frac{3\cos^2 x + (1-\sin^2 x)}{\sin^2 x} = \frac{3\cos^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{4\cos^2 x}{\sin^2 x}$$

$$= 4\cot^2 x$$

$$\therefore L.H = R.H$$

تمارين (3 - 5)

① اذا كان $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ وكان $\cos x = \frac{2}{3}$ فجد قيمة كل من :
$\csc x , \sec x , \cot x$.

الحل / من العلاقة

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow$$

$$\sin^2 x + \frac{4}{9} = 1 \Rightarrow \sin^2 x = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$$

$$\therefore \sin x = \mp \frac{\sqrt{5}}{3}$$

وبما ان x تقع في الربع الرابع فانه $\sin x < 0$ سالب

$$\therefore \sin x = -\frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\therefore \csc x = \frac{1}{\sin x} = -\frac{3}{\sqrt{5}}$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} = \frac{3}{2}$$

$$\cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\frac{2}{3}}{-\frac{\sqrt{5}}{3}} = -\frac{2}{\sqrt{5}}$$

---

② اذا كان $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ وكان $\tan x = \frac{7}{3}$ فجد قيمة كل من :
$\csc x , \sec x , \cot x$

الحل علاقة

$$\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$$

$$\left(\frac{7}{3}\right)^2 + 1 = \sec^2 x \Rightarrow \sec^2 x = \frac{58}{9} \Rightarrow \sec x = \mp \frac{\sqrt{58}}{3}$$

وبما ان x تقع في الربع الثالث فان :

$$\sec x = -\frac{\sqrt{58}}{3}$$

$\cot x = \frac{1}{\tan x} \Rightarrow \cot x = \frac{3}{7}$

$\because 1 + \cot^2 x = \csc^2 x$ علاقة

$\therefore 1 + \frac{9}{49} = \csc^2 x \Rightarrow \csc^2 x = \frac{58}{49} \Rightarrow \csc x = \mp \frac{\sqrt{58}}{7}$

$\therefore \csc x = -\frac{\sqrt{58}}{3}$ لأن x في الربع الثالث

---

③ أثبت صحة المتطابقات الآتية:

ⓐ $\tan x = \sin x \sec x$

الحل / $L.H = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \sin x \cdot \frac{1}{\cos x} = \sin x \sec x$

$\therefore L.H = R.H$

طريقة ثانية نأخذ الطرف الأيمن

$R.H = \sin x \sec x = \sin x \cdot \frac{1}{\cos x} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$

$\therefore L.H = R.H$

ملاحظة: عزيزي الطالب في حالة البرهان على صحة المتطابقة نتبع ما يلي:

① نأخذ الطرف الأيسر L.H ونبسطه حتى نحصل على الطرف الأيمن ونكتب النتيجة L.H = R.H أي الطرف الأيمن = الطرف الأيسر أو بالعكس نأخذ الطرف الأيمن R.H ونبسطه حتى نحصل على الطرف الأيسر.

② في حالة أخذك للطرف الأيسر أو الأيمن ولم تحصل على الطرف الآخر ففي هذه الحالة نأخذ L.H ونصل إلى مرحلة نهائية (ناتج معين) ثم نأخذ الطرف الأيمن R.H ونصل إلى نفس المرحلة (ناتج نهائي) يساوي الأول. نقول عندئذ L.H = R.H

ⓑ $\sec^2 x = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{1 - \sin^2 x}$

الحل / نأخذ الطرف الأيمن فنأخذ:

البسط نستخدم علاقة

$R.H = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{1 - \sin^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$

$= \sec^2 x \qquad \therefore L.H = R.H$

طريقة أخرى نأخذ الطرف الأيسر فإن:

$L.H = \sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{1 - \cos^2 x} \qquad \therefore L.H = R.H$

حيث $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ومنها $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$.

الثاني $\cot^2 x = \csc^2 x - 1$

الحل/ $L.H = \cot^2 x = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x}$

$= \csc^2 x - 1 \qquad \therefore L.H = R.H$

وطريقة أخرى ! $R.H = \csc^2 x - 1 = \frac{1}{\sin^2 x} - 1 = \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}$

$= \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \cot^2 x \qquad \therefore L.H = R.H$

---

c $(1-\sin^2 x)(1+\tan^2 x) = 1$

الحل/ $L.H = (1-\sin^2 x)(1+\tan^2 x) = \cos^2 x \cdot \sec^2 x = \cos^2 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = 1$

$\therefore L.H = R.H$

---

d $\frac{1-\cos^2 x}{\tan x} = \sin x \cos x$

الحل/ نأخذ الطرف الأيسر فان :

$L.H = \frac{1-\cos^2 x}{\tan x} = \frac{\sin^2 x}{\frac{\sin x}{\cos x}} = \sin^2 x \cdot \frac{\cos x}{\sin x} = \sin x \cdot \cos x$

$\therefore L.H = R.H$

---

e $\frac{1+\sin x - \sin^2 x}{\cos x} = \cos x + \tan x$

الحل/

$L.H = \frac{1+\sin x - \sin^2 x}{\cos x} = \frac{(1-\sin^2 x)+\sin x}{\cos x} = \frac{\cos^2 x + \sin x}{\cos x}$

(بجزئه)

$= \frac{\cos^2 x}{\cos x} + \frac{\sin x}{\cos x} = \cos x + \tan x$

$\therefore L.H = R.H$

أسئلة أضافية: ① برهن على صحة المطابقة الآتية :

$(1-\tan x)^2 + (1-\cot x)^2 = (\sec x - \csc x)^2$

الحل/ $L.H = 1 - 2\tan x + \tan^2 x + 1 - 2\cot x + \cot^2 x$

$= (1+\tan^2 x) - 2\tan x + (1+\cot^2 x) - 2\cot x$

$= \sec^2 x - 2(\tan x + \cot x) + \csc^2 x$

$$= \sec^2 x - 2\left(\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}\right) + \csc^2 x$$

$$= \sec^2 x - 2\left(\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x \sin x}\right) + \csc^2 x$$

$$= \sec^2 x - 2\left(\frac{1}{\cos x \sin x}\right) + \csc^2 x$$

$$= \sec^2 x - 2\left(\frac{1}{\cos x} \cdot \frac{1}{\sin x}\right) + \csc^2 x$$

$$= \sec^2 x - 2\sec x \cdot \csc x + \csc^2 x$$

$$= (\text{sex} - \csc x)^2$$ تحليل مربع كامل

ويمكن اخذ الطرف الايمن وتثبيت الطرف الايسر (حاول ذلك).

---

② برهن صحة المتطابقة الآتية

$$\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}} = \frac{\tan x}{\sec x - 1}$$

الحل/ نأخذ الطرف الايسر فانه:

الضرب بمرافق البسط

$$L.H = \sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x} \cdot \frac{1-\cos x}{1-\cos x}}$$

$$= \sqrt{\frac{1-\cos^2 x}{(1-\cos x)^2}} = \frac{\sqrt{\sin^2 x}}{1-\cos x} = \frac{\sin x}{1-\cos x} \quad \dots ①$$

نأخذ الطرف الايمن فانه:

$$R.H = \frac{\tan x}{\sec x - 1} = \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{1}{\cos x} - 1}$$

$$= \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{1-\cos x}{\cos x}} = \frac{\sin x}{1-\cos x} \quad \dots ②$$

$$\therefore ① = ② \longrightarrow L.H = R.H$$

اسئلة اثرائية/ اجب برهن على صحة كل من المتطابقات الآتية

ⓐ $\cot^2 x \cdot \frac{\tan x - 1}{1+\sin x} + \sec^2 x \cdot \frac{\sin x - 1}{1+\sec x} = 0$

ⓑ $\sec x \cdot \csc x = \sqrt{\tan^2 x + \cot^2 x + 2}$

ⓒ $\frac{\cos^4 x - \sin^4 x}{\cos^2 x - \sin^2 x} = 1$

استخدام الحاسبة // Using calculators

لإيجاد قيم الدوال sin ، cos ، tan مباشرة باستخدام الحاسبة ولأي زاوية حسبما ان درست في الصف الرابع العلمي.

اما ايجاد قيم الدوال cot ، sec ، csc لأي زاوية مباشرة باستخدام الحاسبة نتبع ما يلي وحسب المثال التالي:

مثال جد csc 51° باستخدام الآلة الحاسبة.

نجد $\csc 51° = \frac{1}{\sin 51°}$ أي نضغط بالترتيب على المفاتيح من اليسار الى اليمين

sin [1] [5] فيظهر على الشاشة 0.7771459 وهذا يعني ان:

$\sin 51° = 0.7771459$ ثم نضغط على المفاتيح بالترتيب من اليسار الى اليمين

[1/x] [2ndF] فيظهر على الشاشة 1.2867597 وتوجد بعض الحاسبات

موجود عليها مفتاح INV بدلاً من 2ndF

مثال جد cot 35° 22′ ، sec 35° 22′ ، csc 35° 22′ باستخدام الحاسبة

① نحول الدقائق الى كسر عشري من الدرجات وذلك بالضغط على المفاتيح بالترتيب من اليسار الى اليمين [60] ÷ [2] [2] فيظهر على الشاشة العدد 0.3666666

② ثم نكمل كتابة قياس الزاوية [5] [3] [+] فيظهر على الشاشة العدد 0.366667

③ نجد قيمة sin بالضغط على مفتاح sin فيظهر على الشاشة 0.5788068

④ نجد مقلوب الدالة sin بالضغط على مفتاح: [2ndF] ثم [1/x]

فيظهر العدد 1.7276921 على الشاشة وهو يمثل csc 35° 22′

وبنفس الاسلوب نجد sec 35° 22′ حيث $\sec = \frac{1}{\cos}$

كذلك cot 35° 22′ حيث $\cot = \frac{1}{\tan}$.

الزاوية المنتسبة :

تعريف : اذا كانت θ قياس لزاوية حادة فان زاوية قياسها على الصورة $(n\times 90^\circ \pm \theta)$ حيث n عدد صحيح غير سالب تسمى زاوية منتسبة للزاوية الحادة التي قياسها θ .

مثال الزاوية 150° منتسبة للزاوية الحادة 30° لأن :

$$150^\circ = (2\times 90^\circ - 30^\circ)$$

والزاوية 240° منتسبة للزاوية الحادة 60° لأن :

$$240^\circ = (2\times 90^\circ + 60^\circ)$$

والزاوية 300° منتسبة للزاوية الحادة 60° لأن :

$$300^\circ = (4\times 90^\circ - 60^\circ)$$

والزاوية -30° منتسبة للزاوية 30° لأن :

$$-30^\circ = (0\times 90^\circ - 30^\circ)$$

واستناداً للتعريف السابق فانه اذا كانت θ قياس زاوية حادة فان الزوايا التي قياساتها : $(360^\circ+\theta)$ ، $(360^\circ-\theta)$ ، $(180^\circ+\theta)$ ، $(180^\circ-\theta)$ ، $(0^\circ-\theta)$ ، $(0^\circ+\theta)$ ، $(90^\circ+\theta)$ ، $(90^\circ-\theta)$ ، $(270^\circ+\theta)$ ، $(270^\circ-\theta)$ هي زوايا منتسبة للزاوية θ .

مثلاً :

$240^\circ = (270^\circ - 30^\circ)$ أو تكتب $240^\circ = (180^\circ + 60^\circ)$

$135^\circ = (90^\circ + 45^\circ)$ أو تكتب $135^\circ = (180^\circ - 60^\circ)$

$300^\circ = (270^\circ + 30^\circ)$ أو $300^\circ = (360^\circ - 60^\circ)$

$330^\circ = (270^\circ + 60^\circ)$ أو $330^\circ = (360^\circ - 30^\circ)$

الملاحظة التالية مهمة :

اذا كان قياس الزاوية اكبر من 360° او (2π) أي اكثر من دورة واحدة نبدأ بطرح 360° أو مضاعفاتها حسب الزاوية او طرح 2π أو مضاعفاتها اذا كان القياس دائري حتى يصبح القياس رئيسياً اي يصبح قياس الزاوية ينتمي للمجال $[0, 360^\circ)$ أو $[0, 2\pi)$

مثال

جد $\sin 120^\circ$ ، $\cos 120^\circ$ دون استخدام الآلة الحاسبة

الحل / الزاوية 120° تقع في الربع الثاني وتكتب بالشكل $120^\circ = (180^\circ - 60^\circ)$ وان $\cos$ في الربع الثاني سالبة فان :

حيث 120 منتسبة للزاوية 60° $\quad \cos 120^\circ = \cos(180^\circ - 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$

لأن sin في الربع الثاني موجبة فإن

$\sin 120^\circ = \sin(180^\circ - 60^\circ)$

$= \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \cos 120^\circ = -\frac{1}{2} \quad , \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

الربع الثاني Q_2: sin +, cos −, tan −, csc +, sec −, cot − ; الزاوية $= 180 - \theta$	الربع الأول Q_1: sin, cos, tan +; csc, sec, cot + ; $0 < \theta < 90^\circ$; الزاوية حادة
الربع الثالث Q_3: sin −, cos −, tan +, csc −, sec −, cot + ; الزاوية $= 180 + \theta$	الربع الرابع Q_4: sin −, cos +, tan −, csc −, sec +, cot − ; الزاوية $= 360 - \theta$

(المحاور: 90° ، 180° ، 270° ، 0 / 360)

باستخدام دائرة الوحدة والنقطة المثلثية والانعكاس في المحاور السيني والصادي ونقطة الأصل (o) استنتجنا المخطط أعلاه.

$B(x, y) = (\cos\theta, \sin\theta)$

$B(x, y) \xrightarrow{\text{انعكاس على محور السينات}} B'(x, -y)$

حيث $B(x,y)$ في الربع الأول و $B'(x,-y)$ في الربع الرابع فإن:

$x = \cos\theta$ في الربع الأول تبقى في الربع الرابع

$y = \sin\theta$ في الربع الأول تصبح $-y = -\sin\theta$ في الربع الرابع

ومن $\cos > 0$ ، $\sin < 0$ فإن $\tan < 0$. ومقلوباتها حسب الإشارة

وهكذا لو كان الانعكاس في محور الصادات فإن: $B(x, y) \longrightarrow B'(-x, y)$

$x = \cos\theta$ صورتها بالانعكاس في الربع الثاني $-x = -\cos\theta$ لكن $y = \sin\theta$ تبقى نفسها ومنها نستنتج بقية الدوال. كذلك الانعكاس في نقطة الأصل.

ملاحظات: لإيجاد قيم الدوال الدائرية لأية زاوية نتبع الآتي:

① نجد القياس الرئيسي للزاوية إذا كان قياسها أكبر من 360° أو أكبر من 2π نضع قياس الزاوية الرئيسية على الصورة $(n\frac{\pi}{2} \pm \theta)$ أو $(n \times 90^\circ \pm \theta)$ حيث n عدد صحيح موجب أي يأخذ القيم $(1, 2, 3, 4, \ldots)$ θ قياس زاوية حادة.

② إذا كان n عدد صحيح فردي أي يأخذ القيم $1, 3, 5, \ldots$ فإن قيم الدالة الدائرية للزاوية $(n\frac{\pi}{2} \pm \theta)$ تتغير من:

$\sin(n\frac{\pi}{2}\pm\theta)$ الى $\cos\theta$

ومن $\cos(n\frac{\pi}{2}\pm\theta)$ الى $\sin\theta$

ومن $\tan(n\frac{\pi}{2}\pm\theta)$ الى $\cot\theta$

ومن $\sec(n\frac{\pi}{2}\pm\theta)$ الى $\csc\theta$

ومن $\cot(n\frac{\pi}{2}\pm\theta)$ الى $\tan\theta$

ومن $\csc(n\frac{\pi}{2}\pm\theta)$ الى $\sec\theta$

مع مراعاة الاشارة للدالة في الربع الذي تقع فيه الزاوية $(n\frac{\pi}{2}\pm\theta)$

(ب) اذا كان n عدد زوجي موجب أي تأخذ القيم ..... $2, 4, 6,$

فان قيم الدالة الاصلية للزاوية $(n\frac{\pi}{2}\pm\theta)$ لا تتغير وتبقى كما هي

اي $\sin(n\frac{\pi}{2}\pm\theta)$ تحول الى $\sin\theta$ ، $\cos(n\frac{\pi}{2}\pm\theta)$ تحول الى $\cos\theta$

وهكذا بقية الدوال مع مراعاة الاشارة في الربع الذي تقع فيه الزاوية .

(ج) يحدد الربع الذي تقع فيه الزاوية θ ونسبها لاحدى زاويتي هذا الربع

فمثلاً : في الربع الاول : تنسب للزاوية $90^\circ-\theta$ الى $360^\circ+\theta$

في الربع الثاني : تنسب للزاوية $90^\circ+\theta$ الى $180^\circ-\theta$

في الربع الثالث : تنسب للزاوية $180^\circ+\theta$ الى $270^\circ-\theta$

في الربع الرابع : تنسب للزاوية $270^\circ+\theta$ الى $360^\circ-\theta$

مثال : جد قيم الدوال المثلثية للزوايا التي قياساتها :

$30^\circ, 150^\circ, 210^\circ, 330^\circ, 420^\circ$.

الحل/ (أ)

$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\csc 30^\circ = 2$, $\sec 30^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}$, $\cot 30^\circ = \sqrt{3}$

(ب)

(1) $\sin 150^\circ = \sin(180^\circ-30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$

(2) $\cos 150^\circ = \cos(180^\circ-30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

(3) $\tan 150^\circ = \tan(180^\circ-30^\circ) = -\quad 30^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\csc 150^\circ = 2$, $\sec 150^\circ = -\frac{2}{\sqrt{3}}$, $\cot 150^\circ = -\sqrt{3}$

او نأخذ $150^\circ = 90^\circ + 60^\circ$

$\sin 150^\circ = \sin(90^\circ+60^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ نفس الناتج (1)

$\cos 150^\circ = \cos(90^\circ+60^\circ) = -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ نفس الناتج (2)

$\tan \quad = \tan(90^\circ+60^\circ) = -\cot 60^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ نفس الناتج (3)

وهكذا بقية النسب .

ربع ثالث

$\sin 210^\circ = \sin(180^\circ+30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$

$\sin 210^\circ = \sin(270-60) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$

$\cos 210^\circ = \cos(180^\circ+30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 210^\circ = \cos(270-60^\circ) = -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan 210^\circ = \tan(180+30^\circ) = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\tan 210^\circ = \tan(270^\circ-60^\circ) = \cot 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$

اكمل بقية النسب للدوال المثلثية للزوايا 330° ، 420°

$420^\circ = (360^\circ+60^\circ)$, $330^\circ = (360^\circ-30^\circ)$ or $330^\circ = (270^\circ+60^\circ)$

قيم الدوال الدائرية للزاوية التي قياسها $(-\theta)$:

اولاً : اذا كانت الزاوية θ تقع في الربع الاول فإن الزاوية التي قياسها $(-\theta)$ تقع في الربع الرابع .

$\sin(-\theta) = -\sin\theta$

$\cos(-\theta) = \cos\theta$

$\tan(-\theta) = -\tan\theta$

احفظها جيداً عزيزي الطالب

مثال: جد $\sin(-240^\circ)$ ، $\cos(-240^\circ)$

الحل/

$\sin(-240^\circ) = -\sin 240^\circ = -\sin(180^\circ+60^\circ)$

$= -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ 240° تقع في Q_3

$\cos(-240^\circ) = \cos 240^\circ = \cos(180^\circ+60^\circ)$

$= -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$

مثال: جد $\sin\left(\frac{19\pi}{2}\right)$ ، $\cos(780^\circ)$ ، $\tan(-300^\circ)$

الحل/

$\sin\left(\frac{19\pi}{2}\right) = \sin\left(8\pi + \frac{3\pi}{2}\right) = \sin\frac{3\pi}{2} = -1$

$\cos 780^\circ = \cos(2\times 360^\circ + 60^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$

$\tan(-300^\circ) = -\tan 300^\circ = -\tan(360^\circ - 60^\circ)$

$= -(-\tan 60^\circ) = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$

في المثال الاول وجدنا القياس الرئيسي للزاوية $\frac{19\pi}{2}$

في المثال الثاني وجدنا الزاوية الحادة للزاوية المنتسبة 780°

كذلك في المثال الثالث .

تمارين (4 - 5)

① اذا كان $\sin\theta = -\frac{8}{17}$ جد $\cos\theta$, $\cos(\frac{3\pi}{2}-\theta)$, $\sin(\frac{\pi}{2}+\theta)$

الحل/

علاقة $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$(-\frac{8}{17})^2 + \cos^2\theta = 1 \Rightarrow \frac{64}{289} + \cos^2\theta = 1 \Rightarrow$

$\cos^2\theta = 1 - \frac{64}{289} \longrightarrow \cos^2\theta = \frac{225}{289} \Rightarrow \cos\theta = \mp \frac{15}{17}$

تكون sin سالب في الربع الثالث والرابع

$\therefore \cos\theta = \frac{-15}{17}$ (Q_3)

$\cos\theta = \frac{15}{17}$ (Q_4)

$\cos(\frac{3\pi}{2} - \theta) = -\sin\theta = -\frac{8}{17}$

$\sin(\frac{\pi}{2} + \theta) = \cos\theta = -\frac{15}{17}$

---

② اذا كان $\cos B = +0.8$ ، $270^\circ < B < 360^\circ$ جد :

$\sin B$, $\cos(270+B)$, $\cos(270-B)$

الحل/

علاقة $\sin^2 B + \cos^2 B = 1$

$\sin^2 B + (0.8)^2 = 1 \Rightarrow \sin^2 B + 0.64 = 1 \Rightarrow$

$\sin^2 B = 1 - 0.64 \longrightarrow \sin^2 B = 0.36$

$\therefore \sin B = \mp 0.6$

تكون cos موجب في الربع الاول والرابع

$\therefore \sin B = +0.6$ (Q_1)

$\sin B = -0.6$ (Q_4)

$\cos(270+B) = +\sin B = +0.6$ (Q_4)

$\cos(270-B) = -\sin B = -0.6$ (Q_3)

---

③ اذا كان $\sin\alpha = \frac{24}{25}$ ، $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ فاحسب قيمة :

$\sin(90-\alpha) - \cos(180-\alpha) + \cos 120^\circ$

الحل/

علاقة $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$(\frac{24}{25})^2 + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha = 1 - \frac{576}{625} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{49}{625}$

$\therefore \cos\alpha = \mp \frac{7}{25} \rightarrow \cos\alpha = -\frac{7}{25}$ لأن α تقع في الربع الثاني

$\sin(90-\alpha) - \cos(180-\alpha) + \cos 120^\circ =$

$\cos\alpha - (-\cos\alpha) + \cos(180^\circ - 60^\circ) =$

$\cos\alpha + \cos\alpha - \cos 60^\circ = \frac{-7}{25} + \frac{-7}{25} - \frac{1}{2} = \frac{-14-14-25}{50} = \frac{-53}{50}$

---

④ اثبت أن: $\cos(\frac{\pi}{2}+\theta)\cos(\frac{\pi}{2}-\theta) - \sin(\pi+\theta)\sin(\pi-\theta) = 0$

الحل

$L.H = -\sin\theta \cdot \sin\theta - (-\sin\theta)\sin\theta =$

$-\sin^2\theta + \sin^2\theta = 0 \rightarrow L.H = R.H$

---

⑤ حدد الربع الذي تقع فيه الزاوية α إذا كان:

ⓐ $\sin\alpha > 0, \cos\alpha > 0$ α تقع في الربع الأول

ⓑ $\sin\alpha > 0, \cos\alpha < 0$ α تقع في الربع الثاني

ⓒ $\sin\alpha < 0, \cos\alpha < 0$ α تقع في الربع الثالث

ⓓ $\sin\alpha < 0, \cos\alpha > 0$ α تقع في الربع الرابع

---

⑥ أي العبارات الآتية صحيحة وأيها خاطئة؟

ⓐ $\sin 270^\circ = 2\sin 30$ خاطئة لأن:

$-1 \neq 2 \cdot \frac{1}{2}$

ⓑ $\sin 90^\circ = 2\cos 60^\circ$ صحيحة لأن:

$1 = 2 \cdot \frac{1}{2}$

ⓒ $\cos 150^\circ = \frac{1}{2}\tan 120^\circ$ صحيحة لأن:

$\cos(180-30^\circ) = \frac{1}{2}\tan(180^\circ - 60^\circ)$

$-\cos 30^\circ = \frac{1}{2}(-\tan 60)$ $\tan 60 = \sqrt{3}$

$\therefore -\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

ⓓ $\cos(30^\circ+60^\circ) = \cos 30^\circ + \cos 60^\circ$ خاطئة لأن:

$\cos 90^\circ \neq \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}$

$0 \neq \frac{\sqrt{3}+1}{2}$

⑦ اثبت أن:

(a) $\sin(90^\circ+\alpha) + \cot(270^\circ-\alpha) + \cos(180^\circ+\alpha) = \tan\alpha$

الحل/

$L.H = \cos\alpha + \tan\alpha - \cos\alpha = \tan\alpha$

$\therefore L.H = R.H$

(b) $\sin^2 135^\circ = \frac{1}{2}(1-\cos 270^\circ)$

الحل/

$L.H = \sin^2(180^\circ-45^\circ) = [\sin(180-45^\circ)]^2$

$= (\sin 45)^2 = (\frac{1}{\sqrt{2}})^2 = \frac{1}{2}$

$R.H = \frac{1}{2}(1-0) = \frac{1}{2}$

$\therefore L.H = R.H$

الدوال الدائرية لمجموع أو فرق قياسي زاويتين :

لتكن x_1 ، x_2 زاويتين سنجد $\cos(x_1+x_2)$ ، $\cos(x_1-x_2)$ وعلاقة ذلك بالدوال $\cos x_1$ ، $\cos x_2$ ، $\sin x_1$ ، $\sin x_2$.

اولاً // مفكوك $\cos(x_1-x_2)$ ، $\cos(x_1+x_2)$

$$\cos(x_1+x_2) = \cos x_1 \cos x_2 - \sin x_1 \sin x_2$$
$$\cos(x_1-x_2) = \cos x_1 \cos x_2 + \sin x_1 \sin x_2$$

مثال/ احسب $\cos 15^\circ$ ، $\cos 75^\circ$

الحل/

$\cos 75^\circ = \cos(45^\circ+30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \sin 30^\circ$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

$\cos 15^\circ = \cos(45^\circ-30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

ملاحظة: اذا اعطى في السؤال زاوية من غير الزوايا الخاصة نحاول أن نجعل الزاوية مساوية لمجموع زاويتين او الفرق بين زاويتين من الزوايا الخاصة . كما في المثال السابق

ثانياً // مفكوك $\sin(x_1-x_2)$ ، $\sin(x_1+x_2)$

$$\sin(x_1+x_2) = \sin x_1 \cos x_2 + \sin x_2 \cos x_1$$
$$\sin(x_1-x_2) = \sin x_1 \cos x_2 - \sin x_2 \cos x_1$$

مثال/ احسب $\sin 105^\circ$ ، $\sin 15^\circ$

الحل/

$$\sin 105^\circ = \sin(60^\circ + 45^\circ) = \sin 60 \cos 45 + \sin 45^\circ \cos 60^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

$$\sin 15^\circ = \sin(60^\circ - 45^\circ) = \sin 60^\circ \cos 45^\circ - \sin 45 \cos 60^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

مثال// مفكوك $\tan(x_1 + x_2)$ ، $\tan(x_1 - x_2)$

$$\tan(x_1 + x_2) = \frac{\sin(x_1+x_2)}{\cos(x_1+x_2)} = \frac{\sin x_1 \cos x_2 + \sin x_2 \cos x_1}{\cos x_1 \cos x_2 - \sin x_1 \sin x_2}$$

وبقسمة البسط والمقام على $\cos x_1 \cos x_2$

$$= \frac{\frac{\sin x_1 \cos x_2}{\cos x_1 \cos x_2} + \frac{\sin x_2 \cos x_1}{\cos x_1 \cos x_2}}{\frac{\cos x_1 \cos x_2}{\cos x_1 \cos x_2} - \frac{\sin x_1 \sin x_2}{\cos x_1 \cos x_2}}$$

$$\therefore \tan(x_1 + x_2) = \frac{\tan x_1 + \tan x_2}{1 - \tan x_1 \tan x_2}$$

كذلك

$$\tan(x_1 - x_2) = \frac{\tan x_1 - \tan x_2}{1 + \tan x_1 \tan x_2}$$

مثال احسب $\tan 15^\circ$ ، $\tan 75^\circ$

الحل/

$$\tan 75^\circ = \tan(45^\circ + 30^\circ)$$

$$= \frac{\tan 45^\circ + \tan 30^\circ}{1 - \tan 45^\circ \tan 30^\circ} = \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - 1 \times \frac{1}{\sqrt{3}}}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$$

بعض العلاقات المهمة المستنتجة: $x \in R$

(الدوال المثلثية لضعف الزاوية x)

ⓐ $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

ⓑ $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

ⓒ $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

ⓓ $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$

ⓔ $\tan 2x = 2\tan x / (1 - \tan^2 x)$

شرط المقام $\neq$ صفر.

مثال اذا كان $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ ، $0 < \alpha < 90^\circ$ فأحسب

$\sin 2\alpha$ ، $\cos 2\alpha$ ، $\tan 2\alpha$

الحل/ علاقة $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\therefore \frac{16}{25} + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha = 1 - \frac{16}{25}$

$\therefore \cos^2\alpha = \frac{9}{25} \Rightarrow \cos\alpha = \pm\frac{3}{5}$ وبما ان α في الربع الاول

$\therefore \cos\alpha = \frac{3}{5}$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$= \frac{9}{25} - \frac{16}{25} = \boxed{\frac{-7}{25}}$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2 \times \frac{4}{5} \times \frac{3}{5} = \boxed{\frac{24}{25}}$

$\tan 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{-\frac{7}{25}}{\frac{24}{25}} = \boxed{\frac{-7}{24}}$

نتيجة:/ لكل x عدد حقيقي فان

① $\boxed{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1-\cos x}{2}}$ الدالة المثلثية sin لنصف الزاوية

$\Rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$

② $\boxed{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1+\cos x}{2}}$ الدالة المثلثية cos لنصف الزاوية

$\Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$

③ $\boxed{\tan^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$ الدالة المثلثية tan لنصف الزاوية.

مثال احسب $\sin\frac{\pi}{8}$ ، $\cos\frac{\pi}{8}$

الحل/ حسب العلاقة

$\sin^2\frac{\pi}{8} = \frac{1 - \cos\frac{\pi}{4}}{2}$

$= \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}{2} = \frac{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}}{2} = \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ نضرب البسط والمقام بـ $\sqrt{2}$

$\therefore \sin^2\frac{\pi}{8} = \frac{2-\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

$$\cos^2\frac{\pi}{8} = \frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}$$

وبنفس الطريقة:

$$\therefore \cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

مثال بدون استخدام الحاسبات احسب $\sin 22^\circ 30'$ ، $\cos 22^\circ 30'$

الحل/ $22^\circ 30'$ نصف الزاوية 45°

$$\sin^2 22^\circ 30' = \frac{1-\cos 45^\circ}{2}$$

$$= \frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{2} = \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

الضرب بالبسط والمقام × $\sqrt{2}$

$$\therefore \sin^2 22^\circ 30' = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

$$\therefore \sin 22^\circ 30' = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

$$\cos^2 22^\circ 30' = \frac{1+\cos 45^\circ}{2} = \frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$$

$$\therefore \cos 22^\circ 30' = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

مثال بين أن: $\cos^4\frac{x}{2} - \sin^4\frac{x}{2} = \cos x \quad \forall x \in R$

الحل/

علاقة   علاقة cos ضعف الزاوية

$$\cos^4\frac{x}{2} - \sin^4\frac{x}{2} = \left(\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}\right)\left(\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}\right)$$

$$= \cos\left(2\left(\frac{x}{2}\right)\right) \cdot (1)$$

$$= \cos x$$

تمارين (5 - 5)

① اذا كان $\tan x = \frac{3}{4}$ وكانت $0° < x < 90°$ فاحسب: $\sin 2x$ ، $\cos 2x$ ، $\tan 2x$.

الحل/

$\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$ معرفة

$\frac{9}{16} + 1 = \sec^2 x \Rightarrow \sec^2 x = \frac{9+16}{16} = \frac{25}{16}$

$\therefore \sec x = \pm \frac{5}{4}$

$\therefore \sec x = \frac{5}{4}$ لان $x \in Q_1$

$\sec x = \frac{1}{\cos x} \Rightarrow \cos x = \boxed{\frac{4}{5}}$

$\because \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \Rightarrow \frac{16}{25} + \sin^2 x = 1$

$\therefore \sin^2 x = 1 - \frac{16}{25} \Rightarrow \sin^2 x = \frac{9}{25} \Rightarrow \sin x = \boxed{\frac{3}{5}}$

$\sin 2x = 2\sin x \cos x = 2\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{24}{25}$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \frac{16}{25} - \frac{9}{25} = \frac{7}{25}$

$\tan 2x = \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \frac{\frac{24}{25}}{\frac{7}{25}}$

$\therefore \tan 2x = \frac{24}{7}$

---

② اذا كان $\sec\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$ ، $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ احسب: $\csc 2\alpha$ ، $\cot 2\alpha$

الحل/

$\sec\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$ لأن $\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$

$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \Rightarrow \frac{4}{5} + \sin^2\alpha = 1$

$\therefore \sin^2\alpha = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$

$\therefore \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$ α تقع في الربع الاول

$\csc 2\alpha = \frac{1}{\sin 2\alpha} = \frac{1}{2\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{1}{2\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)} = \frac{5}{4}$

$\cot 2\alpha = \frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{\frac{4}{5} - \frac{1}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$

③ اذا كان $\tan^2\alpha = \frac{4}{9}$ ، $90° < \alpha < 180°$

فأحسب : $\cos(180° - 2\alpha)$ ، $\sin(2\alpha - 90°)$

الحل/

$\tan^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha$ علاقة

$\frac{4}{9} + 1 = \sec^2\alpha \Rightarrow \sec^2\alpha = \frac{13}{9}$

$\therefore \sec\alpha = \pm\frac{\sqrt{13}}{3} \Rightarrow \sec\alpha = -\frac{\sqrt{13}}{3}$ لوقوعه في الربع الثاني

$\cos\alpha = \frac{1}{\sec\alpha} = -\frac{3}{\sqrt{13}}$

$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ علاقة

$\therefore \frac{9}{13} + \sin^2\alpha = 1 \Rightarrow \sin^2\alpha = 1 - \frac{9}{13} = \frac{4}{13}$

$\therefore \sin\alpha = \pm\frac{2}{\sqrt{13}} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{13}}$ لوقوعه في الربع الثاني

$\therefore \cos(180° - 2\alpha) = -\cos 2\alpha = -(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)$

$= -\left(\frac{9}{13} - \frac{4}{13}\right) = \boxed{-\frac{5}{13}}$

$\sin(2\alpha - 90°) = \sin(-(90° - 2\alpha))$

$= -\cos 2\alpha = -\frac{5}{13}$ (من السابق)

④ اذا كانت كل من α ، β زاوية حادة موجبة بحيث $\beta + \alpha = 45°$ وكان $\frac{\tan\alpha}{\tan\beta} = \frac{2}{3}$ فأحسب $\tan 2\beta$ ، $\tan 2\alpha$.

الحل/

$\beta + \alpha = 45° \Rightarrow \beta = 45° - \alpha$

$\frac{\tan\alpha}{\tan\beta} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{\tan\alpha}{\tan(45° - \alpha)} = \frac{2}{3} \Rightarrow$

$\frac{\tan\alpha}{\frac{\tan 45° - \tan\alpha}{1 + \tan 45° \tan\alpha}} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{\tan\alpha}{\frac{1 - \tan\alpha}{1 + \tan\alpha}} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{\tan\alpha(1 + \tan\alpha)}{1 - \tan\alpha} = \frac{2}{3}$

$3\tan\alpha(1 + \tan\alpha) = 2(1 - \tan\alpha)$

$3\tan\alpha + 3\tan^2\alpha = 2 - 2\tan\alpha \Rightarrow 3\tan^2\alpha + 5\tan\alpha - 2 = 0$

$\therefore (\tan\alpha + 2)(3\tan\alpha - 1) = 0$

either $\tan\alpha + 2 = 0 \Rightarrow \tan\alpha = -2$ يهمل

or $3\tan\alpha - 1 = 0 \Rightarrow \tan\alpha = \boxed{\frac{1}{3}}$

$\therefore \frac{\frac{1}{3}}{\tan\beta} = \frac{2}{3} \Rightarrow 2\tan\beta = 3 \times \frac{1}{3} \Rightarrow \tan\beta = \boxed{\frac{1}{2}}$

$\therefore \tan 2\beta = \frac{2\tan\beta}{1 - \tan^2\beta} = \frac{2\left(\frac{1}{2}\right)}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \boxed{\frac{4}{3}}$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \frac{2(\frac{1}{3})}{1-(\frac{1}{3})^2} = \frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{9}} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{8}{9}} = \frac{2}{3}\cdot\frac{9}{8} = \boxed{\frac{3}{4}}$$

⑤ أثبت أن $\cot\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}$ ثم احسب $\cot 15^\circ$

الحل/

$$\cot\frac{\alpha}{2} = \frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}}{\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}$$

$$\cot 15^\circ = \sqrt{\frac{1+\cos 30^\circ}{1-\cos 30}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}} = \sqrt{\frac{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}}$$

بدون استخدام الحاسبات

⑥ اثبت صحة المتطابقات الآتية

ⓐ $(\sin\theta+\cos\theta)^2 = 1+\sin 2\theta$

الحل/

$$L.H = (\sin\theta+\cos\theta)^2 = \sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta$$

$$= (\sin^2\theta+\cos^2\theta) + 2\sin\theta\cos\theta = 1+\sin 2\theta$$

$\therefore L.H = R.H$

ⓑ $\sec(x-y) = \frac{\sec x \sec y}{1+\tan x\tan y}$

الحل/

$$L.H = \sec(x-y) = \frac{1}{\cos(x-y)} = \frac{1}{\cos x\cos y+\sin x\sin y}$$

$$= \frac{\frac{1}{\cos x\cos y}}{\frac{\cos x\cos y}{\cos x\cos y}+\frac{\sin x\sin y}{\cos x\cos y}} = \frac{\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{1}{\cos y}}{1+\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\frac{\sin y}{\cos y}}$$

$$= \frac{\sec x\cdot\sec y}{1+\tan x\cdot\tan y}$$

$\therefore L.H = R.H$

ⓒ $\frac{\sin(-\alpha)-\sin(\beta-90^\circ)}{-\cos(270^\circ+\alpha)+\cos\beta} + \frac{\sin(\alpha-180^\circ)-\cos(-\beta)}{\sin(180+\alpha)-\sin(\beta+90^\circ)} = 2$

الحل/

$$L.H = \frac{-\sin\alpha+\cos\beta}{-\sin\alpha+\cos\beta} + \frac{-\sin\alpha-\cos\beta}{-\sin\alpha-\cos\beta}$$

$$= 1+1 = 2 \qquad \therefore L.H = R.H$$

(d) $\tan(270^\circ-\alpha)+\dfrac{\sin(180^\circ-\alpha)}{1-\cos(180^\circ-\alpha)}=\csc\alpha$

الحل/

$L.H=\cot\alpha+\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$

$=\dfrac{\cos\alpha(1+\cos\alpha)+\sin^2\alpha}{\sin\alpha(1+\cos\alpha)}=\dfrac{\cos\alpha+(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)}{\sin\alpha(1+\cos\alpha)}$

$=\dfrac{\cos\alpha+1}{\sin\alpha(1+\cos\alpha)}=\dfrac{1}{\sin\alpha}=\csc\alpha$

$\therefore L.H=R.H$

(e) $\sin 20^\circ\cos 10^\circ+\cos 20^\circ\sin 10^\circ=1/2$

الحل/

$L.H=\sin 20^\circ\cos 10^\circ+\cos 20^\circ\sin 10^\circ=\sin(20^\circ+10^\circ)$

$=\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$

$\therefore L.H=R.H$

(f) $\cos 35^\circ\cos 25^\circ-\cos 55^\circ\cos 65^\circ=1/2$

الحل/

$L.H=\cos\ \ \cos 25^\circ-\cos(90^\circ-35^\circ)\cos(90^\circ-25^\circ)$

$=\cos 35^\circ\cos 25^\circ-\sin 35^\circ\sin 25^\circ=\cos(35^\circ+25^\circ)$

$=\cos(60^\circ)=\frac{1}{2}$ $\quad\therefore L.H=R.H$

بدلنا $90-35=55$ و $90-25=65$.

(g) $\sin^2 x\cos^2 x=\dfrac{1-\cos 4x}{8}$

الحل/

$L.H=\sin^2 x\cos^2 x=(\sin x\cos x)^2=\left(\dfrac{2\sin x\cos x}{2}\right)^2$

$=\left(\dfrac{\sin 2x}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}\sin^2 2x$

علاقة

$=\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1-\cos 4x}{2}=\dfrac{1-\cos 4x}{8}$ $\quad\therefore L.H=R.H$

(h) $\sin 4x=8\cos^3 x\sin x-4\cos x\sin x$

الحل/

$L.H=\sin 4x=\sin 2(2x)=2\sin 2x\cos 2x$

$=2(2\sin x\cos x)\cdot(2\cos^2 x-1)$

$=8\cos^3 x\sin x-4\cos x\sin x$ $\quad\therefore L.H=R.H$

⑦ أحسب $\sin 3x$ ، $\cos 3x$ ، بدلالة $\sin x$ ، $\cos x$.

الحل/

$$\sin 3x = \sin(x + 2x)$$
$$= \sin x \cos 2x + \cos x \sin 2x$$
$$= \sin x (1 - 2\sin^2 x) + \cos x (2\sin x \cos x)$$
$$= \sin x - 2\sin^3 x + 2\sin x \cos^2 x$$
$$= \sin x - 2\sin^3 x + 2\sin x(1 - \sin^2 x)$$
$$= \sin x - 2\sin^3 x + 2\sin x - 2\sin^3 x$$
$$= 3\sin x - 4\sin^3 x$$

$$\cos 3x = \cos(x + 2x)$$
$$= \cos x \cos 2x - \sin x \sin 2x$$
$$= \cos x (2\cos^2 x - 1) - \sin x (2\sin x \cos x)$$
$$= 2\cos^3 x - \cos x - 2\sin^2 x \cos x$$
$$= 2\cos^3 x - \cos x - 2(1 - \cos^2 x)\cos x$$
$$= 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x + 2\cos^3 x$$
$$= 4\cos^3 x - 3\cos x$$

المعادلات المثلثية:

تعريف//

المعادلة المثلثية هي جملة مفتوحة تحوي دالة مثلثية أو أكثر لزاوية معينة أو عدة زوايا ، وابسط صورها هي: $\sin x = B$ ، $\cos x = k$ حيث $x \in R$

$$B, k \in [-1, 1]$$

اولاً: المعادلات المثلثية البسيطة:

لتكن x قياس زاوية مجهولة ، B قياس زاوية معلومة $0 \le B \le 2\pi$

ولندرس الحالات الثلاث الآتية:

ⓐ $\sin x = \sin B \iff x = B \quad or \quad x = \pi - B$

لأن $\sin$ موجبة في الربع الاول والثاني وبالقياس الستيني

$$x = B \quad or \quad x = 180^\circ - B$$

مثال اذا كان $\sin x = \sin 45^\circ$ فما قيم x ؟

الحل/ $\sin x = \sin B \Rightarrow x = 45^\circ \quad or \; x = 180^\circ - 45^\circ$

اي ان $x = 45^\circ$ or $x = 135^\circ$

مثال: حل المعادلة $\sin x = \frac{1}{2}$

الحل/ نبحث عن زاوية جيبها $= \frac{1}{2}$ يكون الجيب موجب في Q_1, Q_2

$\sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin x = \sin 30^\circ$

$\therefore x = 30^\circ$

or $x = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$

S مجموعة الحل $\therefore S = \{30^\circ, 150^\circ\}$

(b) $\cos x = \cos B \Leftrightarrow x = B$ or $x = 2\pi - B$ cos موجب في الربع الأول والرابع

(بالقياس الستيني) $x = B$ or $x = 360^\circ - B$

مثال: حل المعادلة $\cos x = \cos 75^\circ$

الحل/ $\cos x = \cos 75^\circ \Rightarrow x = 75^\circ$ or $x = 360^\circ - 75^\circ = 285^\circ$

$\therefore S = \{75^\circ, 285^\circ\}$

مثال: حل المعادلة $\cos x = -\frac{1}{2}$

الحل/ الجيب تمام يكون سالباً في الربع الثاني والثالث.

$\cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \cos 120^\circ$

نبحث عن $\frac{1}{2} = \cos$ الزاوية التي قياسها الزاوية 60 وعليه تكون الزاوية $60 - 180$ في الربع الثاني و $360^\circ - 120^\circ$ في الربع الثالث

$\therefore x = 120^\circ$

or $x = 240^\circ$

$\therefore S = \{120^\circ, 240^\circ\}$

(c) $\tan x = \tan B \Leftrightarrow x = B$ في الربع الأول

or $x = B + \pi$ في الربع الثالث

بالقياس الستيني $x = B$ or $x = 180^\circ + B$

مثال: حل المعادلة $\tan x = \tan 53^\circ$.

الحل/ $x = 53^\circ$ في الربع الأول or $x = 180^\circ + 53^\circ = 233^\circ$ في الربع الثالث

$\therefore S = \{53^\circ, 233^\circ\}$

مثال: حل المعادلة $\tan x = \sqrt{3}$

الحل/ نبحث عن زاوية ظلها $= \sqrt{3}$ هي 60° يكون الظل موجب في الربع الأول والثالث

$\therefore \tan x = \tan 60^\circ$

$\therefore x = 60^\circ$ or $x = 240^\circ$

$\therefore S = \{60^\circ, 240^\circ\}$

مثال حل المعادلة $\tan 4x + \cot x = 0$

الحل / Q_2

$\tan 4x = -\cot x \Rightarrow \tan 4x = \tan(90^\circ + x)$

$\therefore 4x = 90^\circ + x \Rightarrow 3x = 90^\circ \Rightarrow x = 30^\circ$

or $\tan 4x = \tan(270^\circ + x)$

$\therefore 4x = 270^\circ + x \Rightarrow 3x = 270^\circ \Rightarrow x = 90^\circ$ تهمل لان $\tan 90^\circ$ غير معرفة

$\therefore S = \{30^\circ\}$

مثال حل المعادلة $2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0$

الحل /

$(\cos x + 2)(2\cos x - 1) = 0$

either $\cos x = -2$ يهمل $-1 \le \cos x \le 1$

or $2\cos x - 1 = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2}$

يكون cos موجب في الربع الاول والرابع

$x = 60^\circ \quad Q_1 \quad$ or $\quad x = 360^\circ - 60^\circ = 300^\circ \quad Q_4$

$\therefore S = \{60^\circ, 300^\circ\}$

ثانياً: (1) المعادلات المثلثية من الصورة $a\sin x + b\cos x = c$

اي انها معادلة من الدرجة الاولى بالنسبة لكل $(\cos x)$ ، $(\sin x)$

(2) المعادلات المثلثية من الصورة :

$a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = d$

اي انها معادلة من الدرجة الثانية في كل من $(\sin x)$ ، $(\cos x)$

ففي الحالة الاولى اذا كان احد المعادلات a, b, c يساوي صفراً فان المعادلة تتحول الى معادلة بسيطة ويمكن حلها كما في الحالة (اولاً)

اما اذا كان كل من هذه المعاملات لا يساوي صفراً فيمكن توضيح حلها اذا كان $c^2 \le a^2 + b^2$ وكما في المثال الاتي :

مثال حل المعادلة $\sqrt{3}\sin x + \cos x = \sqrt{3}$

الحل / لحل هذه المعادلة نتبع ما يلي :

$\sqrt{3}\sin x + \cos x = \sqrt{3} \Rightarrow$

$\tan\frac{\pi}{3}\sin x + \cos x = \sqrt{3} \Rightarrow \frac{\sin \pi/3}{\cos \pi/3}\sin x + \cos x = \sqrt{3} \Rightarrow$

$\sin\frac{\pi}{3}\sin x + \cos x \cdot \cos\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}\cos\frac{\pi}{3} \Rightarrow$

$\cos(\frac{\pi}{3} - x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \cos(\frac{\pi}{3} - x) = \cos\frac{\pi}{6}$

يكون cos موجباً في الربع الاول والرابع

either $\frac{\pi}{3} - x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$ Q_1

or $\frac{\pi}{3} - x = -\frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$ Q_4

$\therefore S = \{ \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2} \}$ مجموعة الحل

اما الحالة الثانية) فنعوض عن الدوال المثلثية للزاوية بدلالة جيب وجيب تمام ضعف الزاوية فتكون $a\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right) + b\left(\frac{\sin 2x}{2}\right) + c\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right) = d$

ثم نكمل الحل لايجاد قيم x.

مثال حل المعادلة الآتية: $2\sin^2 x + \sqrt{3}\sin x\cos x + 3\cos^2 x = 3$

الحل

$2\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right) + \sqrt{3}\,\frac{\sin 2x}{2} + 3\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right) = 3$

$2(1-\cos 2x) + \sqrt{3}\sin 2x + 3(1+\cos 2x) = 6$

$2 - 2\cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x + 3 + 3\cos 2x = 6$

$\therefore \sqrt{3}\sin 2x + \cos x = 1$

$\tan\frac{\pi}{3}\sin 2x + \cos x = 1 \Rightarrow \frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}}\sin 2x + \cos x = 1$

$\therefore \sin\frac{\pi}{3}\sin 2x + \cos\frac{\pi}{3}\cos x = \cos\frac{\pi}{3}$

$\therefore \cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) = \cos\frac{\pi}{3}$ يكون cos موجب في Q_1, Q_4

$\therefore \frac{\pi}{3} - 2x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$ في Q_1

or $\cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

$\therefore \frac{\pi}{3} - 2x = -\frac{\pi}{3} \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}$

$\therefore 2x = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}$

$\therefore S = \{ 0, \frac{\pi}{3} \}$ مجموعة الحل

تمارين (6 - 5)

حل المعادلات الآتية :

① $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

الحل/ يكون $\sin x$ موجب في الربع الاول والثاني .

$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin x = \sin 60^\circ$ Q_1

$\therefore x = 60^\circ$ or $\sin x = \sin(180^\circ - 60^\circ)$ Q_4

$\therefore x = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

$\therefore S = \{60^\circ, 120^\circ\}$

② $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

الحل/ يكون $\cos x$ موجب في الربع الاول والرابع

$\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore \cos x = \cos 45^\circ \Rightarrow x = 45^\circ$ Q_1

or $\cos x = \cos(360^\circ - 45^\circ) \Rightarrow x = 360^\circ - 45^\circ = 315^\circ$ Q_4

$\therefore S = \{45^\circ, 315^\circ\}$

③ $\tan x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

الحل/ يكون $\tan x$ موجب في الربع الاول والثالث

$\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore \tan x = \tan 30^\circ \Rightarrow x = 30^\circ$ Q_1

or $\tan x = \tan(180^\circ + 30^\circ) \Rightarrow x = 180^\circ + 30^\circ = 210^\circ$ Q_3

$\therefore S = \{30^\circ, 210^\circ\}$

④ $\sin 2x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$

الحل/

$2 \sin x \cos x = \cos x$

$\therefore 2 \sin x \cos x - \cos x = 0$

$\cos x (2 \sin x - 1) = 0$

either $\cos x = 0 \Rightarrow x = 90^\circ, 270^\circ$

or $2 \sin x - 1 = 0 \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 30^\circ, 150^\circ$

$\therefore S = \{30^\circ, 90^\circ, 150^\circ, 270^\circ\}$

⑤ $\cos 4x = \cos(x+\pi)$

الحل / تكون $\cos x$ موجبة في الربع الاول والرابع

either $4x = x + \pi \Rightarrow 3x = \pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}$ $\quad Q_1$

or $\cos 4x = \cos(2\pi - (x+\pi))$ $\quad Q_4$

$4x = 2\pi - (x+\pi)$

$4x = 2\pi - x - \pi \Rightarrow 5x = \pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{5}$

$\therefore S = \{\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{5}\}$

---

⑥ $\tan 4x - \cot x = 0$

الحل /

$\tan 4x = \cot x \Rightarrow \tan 4x = \tan(90^\circ - x)$ $\quad Q_1$

$\therefore 4x = 90^\circ - x \Rightarrow 5x = 90^\circ \Rightarrow x = \frac{90^\circ}{5} = 18^\circ$

or $\tan 4x = \tan(270^\circ - x)$ $\quad Q_3$

$\therefore 4x = 270^\circ - x \Rightarrow 5x = 270^\circ \Rightarrow x = \frac{270^\circ}{5} = 54^\circ$

$\therefore S = \{18^\circ, 54^\circ\}$

---

⑦ $\tan^2 x + 2\tan x + 1 = 0$

الحل /

$(\tan x + 1)^2 = 0$ (تحليل المقدار الثلاثي (مربع كامل))

$\therefore \tan x + 1 = 0 \rightarrow \tan x = -1$ تكون $\tan x$ سالبة في الربع الثاني والرابع

$\tan x = \tan(180^\circ - 45^\circ)$ $\quad Q_2$

$\therefore x = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$

or $\tan x = \tan(360^\circ - 45^\circ)$ $\quad Q_4$

$\therefore x = 360^\circ - 45^\circ = 315^\circ$

$\therefore S = \{135^\circ, 315^\circ\}$

---

⑧ $\cos^2 x - \cos x = 0$

الحل /

$\cos x(\cos x - 1) = 0$ اخراج عامل مشترك من الطرف الايسر

either $\cos x = 0 \rightarrow x = 90^\circ, 270^\circ$

or $\cos x - 1 = 0 \Rightarrow \cos x = 1$

$\cos x = 1 \Rightarrow \cos x = \cos 0 \Rightarrow x = 0, 360^\circ$ $\quad \therefore S = \{0, 90, 270, 360\}$

⑨ $\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$

/الحل

$\cos x = 2\left(\frac{1-\cos x}{2}\right)$

$\therefore \cos x = 1-\cos x$

$2\cos x = 1 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2}$ يكون cosx موجب في Q_1, Q_4

$\cos x = \cos 60^\circ \Rightarrow x = 60^\circ$ Q_1

or $\cos x = \cos(360^\circ - 60^\circ) \Rightarrow x = 300^\circ$ Q_4

$\therefore S = \{60^\circ, 300^\circ\}$

---

⑩ $\tan 2x = 3\tan x$

/الحل

$\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x} = 3\tan x$

$2\tan x = 3\tan x - 3\tan^3 x$

$3\tan^3 x - \tan x = 0$

$\tan x(3\tan^2 x - 1) = 0$

either $\tan x = 0 \Rightarrow x = 0^\circ, 180^\circ$

or $3\tan^2 x - 1 = 0 \Rightarrow \tan^2 x = \frac{1}{3} \Rightarrow \tan x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ يكون tan موجب في Q_1, Q_3

$\therefore x = 30^\circ$ Q_1 , $x = 210^\circ$ Q_3

$\tan x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ يكون tan سالب في Q_2, Q_4

$\therefore x = 150^\circ$ Q_2 , $x = 330^\circ$ Q_4

$\therefore S = \{30^\circ, 210^\circ, 150^\circ, 330^\circ\}$

---

⑪ $\cos x = \sqrt{2}\sin^2 x$

/الحل

$\cos x = \sqrt{2}(1-\cos^2 x)$ بالتوزيع

$\cos x = \sqrt{2} - \sqrt{2}\cos^2 x$

$\therefore \sqrt{2}\cos^2 x + \cos x - \sqrt{2} = 0 \Rightarrow (\sqrt{2}\cos x - 1)(\cos x + \sqrt{2}) = 0$

تحلل بطريقة التجربة

either $\sqrt{2}\cos x - 1 = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ يكون cos موجب في Q_1, Q_4

$\therefore x = 45^\circ \quad Q_1 \quad , \quad x = 315^\circ \quad Q_4$

or $\cos x + \sqrt{2} = 0 \Rightarrow \cos x = -\sqrt{2}$ يهمل لأن $-1 \le \cos x \le 1$

$\therefore S = \{45^\circ, 315^\circ\}$

---

(12) $2\sin^2 x = \cos 2x(4\sin 2x - 1)$

الحل/

$2\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right) = 4\cos 2x \sin 2x - \cos 2x$

$1 - \cos 2x + \cos 2x - 4\cos 2x \sin 2x = 0 \Rightarrow$

$1 - 4\cos 2x \sin 2x = 0 \Rightarrow 1 - 2(2\cos 2x \sin 2x) = 0$

$\therefore 1 - 2\sin 4x = 0 \Rightarrow \sin 4x = \frac{1}{2}$ (علاقة)

يكون sin موجب في Q_1, Q_2

$\therefore \sin 4x = \sin 30^\circ \Rightarrow 4x = 30^\circ \Rightarrow x = \frac{30^\circ}{4} = 7.5^\circ \quad Q_1$

or $\sin 4x = \sin(180^\circ - 30^\circ) \Rightarrow 4x = 150^\circ \Rightarrow x = \frac{150^\circ}{4} = 38.5^\circ \quad Q_2$

$\therefore S = \{7.5^\circ, 38.5^\circ\}$

---

(13) $\cos^3 x = \sin^3 x$

الحل/ بقسمة الطرفين على $\cos^3 x$

$\frac{\cos^3 x}{\cos^3 x} = \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} \Rightarrow$

$\tan^3 x = 1 \Rightarrow \tan x = 1 \Rightarrow \tan x = \tan 45^\circ$ في Q_1

$\therefore x = 45^\circ$ or $\tan x = \tan(180^\circ + 45^\circ)$ في Q_3

$\therefore x = 225^\circ$

$\therefore S = \{45^\circ, 225^\circ\}$

الوزاري $4\cos^4 x + 4\sin^4 x = 3$

الحل/

$4(\cos^2 x)^2 + 4(\sin^2 x)^2 = 3$

(علاقة ٢) (علاقة)

$4\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 + 4\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 = 3 \Rightarrow$

$4 \cdot \frac{(1+\cos 2x)^2}{4} + 4 \cdot \frac{(1-\cos 2x)^2}{4} = 3 \Rightarrow$

$1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x + 1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x = 3$

$\therefore 2\cos^2 2x = 3 - 2 \Rightarrow 2\cos^2 2x = 1$

$\therefore \cos^2 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos 2x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

either $\cos 2x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \cos 2x = \cos(45^\circ)$ Q_1

$\therefore 2x = 45^\circ \Rightarrow x = \frac{45^\circ}{2} = 22.5^\circ$

or $\cos 2x = \cos(360^\circ - 45^\circ) \Rightarrow 2x = 315^\circ \Rightarrow x = \frac{315^\circ}{2} = 157.5^\circ$ Q_4

$\cos 2x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \cos 2x = \cos(180^\circ - 45^\circ)$ Q_2

$\therefore 2x = 135^\circ \Rightarrow x = \frac{135}{2} = 67.5^\circ$

or $\cos 2x = \cos(180^\circ + 45^\circ) \Rightarrow 2x = 225^\circ$ Q_3

$\therefore x = \frac{225}{2} = 112.5^\circ$

$\therefore S = \{22.5^\circ, 157.5^\circ, 67.5^\circ, 112.5^\circ\}$

---

14 $\sin x + \cos x = 1$

الحل / نعتبر معامل $\sin x$ يساوي $\tan\frac{\pi}{4} = 1$

$\therefore \tan\frac{\pi}{4}\sin x + \cos x = 1 \Rightarrow$ $\tan\frac{\pi}{4} = \frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}}$

$\left(\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}}\sin x + \cos x = 1\right) \times \cos\frac{\pi}{4}$

$\sin\frac{\pi}{4}\sin x + \cos\frac{\pi}{4}\cos x = \cos\frac{\pi}{4} \Rightarrow$

$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4}$

$\therefore x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

or $\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \cos\frac{\pi}{4}$

$\frac{\pi}{4} - x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = 0$

$\therefore$ مجموعة الحل $= S = \{0, \frac{\pi}{2}\}$

الوزاري $2\cos x - \sqrt{3}\sin x = 2$

الحل / وبتربيع الطرفين

$2\cos x - 2 = \sqrt{3}\sin x$

$4\cos^2 x - 8\cos x + 4 = 3\sin^2 x$

$$4\cos^2 x - 8\cos x + 4 = 3(1-\cos^2 x)$$

$$4\cos^2 x - 8\cos x + 4 = 3 - 3\cos^2 x$$

$$4\cos^2 x + 3\cos^2 x - 8\cos x + 4 - 3 = 0$$

$$\therefore \quad 7\cos^2 x - 8\cos x + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$(7\cos x - 1)(\cos x - 1) = 0$$

either $7\cos x - 1 = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{7}$ يهمل لا يعتبر

or $\cos x - 1 = 0 \Rightarrow \cos x = 1 \Rightarrow x = 0\ ,\ 360^\circ$

$$\therefore \quad S = \{0^\circ, 360^\circ\}$$

سؤال اثرائي:

$$\sqrt{3}\ \sin x + \cos x = \sqrt{2}$$

الحل/

$$\tan 60^\circ \sin x + \cos x = \sqrt{2}$$

$$\left(\frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ}\sin x + \cos x = \sqrt{2}\right) \times \cos 60^\circ$$

$$\therefore \sin 60^\circ \sin x + \cos 60^\circ \cos x = \sqrt{2}\ \cos 60^\circ$$

$$\cos(60^\circ - x) = \frac{\sqrt{2}}{1} \times \frac{1}{2}$$

$$\cos(60^\circ - x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \cos(60^\circ - x) = \cos 45^\circ$$

$$\therefore 60^\circ - x = 45^\circ \Rightarrow x = 15^\circ$$

or $\cos(x - 60^\circ) = \cos 45^\circ \Rightarrow x - 60^\circ = 45^\circ \Rightarrow x = 105^\circ$

$$\therefore S = \{15^\circ, 105^\circ\}$$

اثرائي $\quad 2\sin 2x + 2\cos 2x = \sqrt{6}$

الحل/ بقسمة طرفي المعادلة على 2 وبتربيع الطرفين

$$\sin 2x + \cos 2x = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\sin^2 2x + 2\sin 2x\cos 2x + \cos^2 2x = \frac{6}{4}$$

$$\therefore \underbrace{(\sin^2 2x + \cos^2 2x)}_{\text{متطابقة}} + \underbrace{2\sin 2x\cos 2x}_{\text{متطابقة}} = \frac{3}{2}$$

$$1 \quad + \quad \sin 4x = \frac{3}{2}$$

$$\therefore \sin 4x = \frac{3}{2} - 1 \Rightarrow \sin 4x = \frac{1}{2}$$

تكون Sin موجبة في Q_1 ، Q_2

$$\therefore \sin 4x = \sin 30^\circ \quad Q_1$$

$$4x = 30^\circ \Rightarrow x = 7.5^\circ$$

$$\sin 4x = \sin 150^\circ \quad Q_2 \Rightarrow 4x = 150^\circ \Rightarrow x = 37.5^\circ$$

$$\therefore S = \{7.5^\circ, 37.5^\circ\}$$

الواجب $2\sin^2 x + 4\sin x\cos x - 4\cos^2 x = 1$

الحل/ $2\sin^2 x + 4\sin x\cos x - 4\cos^2 x = \sin^2 x + \cos^2 x$ (بدل 1)

$\therefore \sin^2 x + 4\sin x\cos x - 5\cos^2 x = 0 \Rightarrow$

$(\sin x - \cos x)(\sin x + 5\cos x) = 0$

either $\sin x - \cos x = 0 \rightarrow \sin x = \cos x \rightarrow \tan x = 1$ (نسبة الزاوية [illegible])

$\therefore x = 45^\circ \; Q_1 \quad or \quad x = 225^\circ \; Q_3$

or $\sin x + 5\cos x = 0 \Rightarrow \sin x = -5\cos x \Rightarrow \tan x = -5$

$\therefore x = -78^\circ.69 \Rightarrow x = 180^\circ - 78^\circ.69' = 101^\circ.31' \quad Q_2$ باستخدام الحاسبة

or $x = 360^\circ - 78^\circ.69 = 281^\circ.31' \quad Q_4$

$\therefore S = \{45^\circ, 225^\circ, 101^\circ.31', 281^\circ.31'\}$

حل المثلث وتطبيقات عليه :

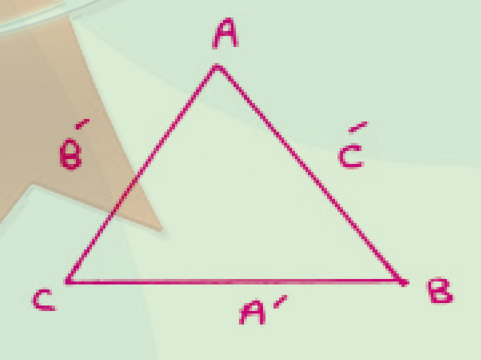
للمثلث ستة عناصر وهي ثلاث زوايا وثلاث أضلاع والمقصود بحل المثلث هو حساب العناصر المجهولة باستخدام عناصر معلومة من المثلث . ويوجد قانونين لحل المثلث .

اولاً : باستخدام قانون الجيب تمام للزاوية : اذا علمت اطوال اضلاع المثلث

$$\cos A = \frac{B'^2 + C'^2 - A'^2}{2B'C'}$$

$$\cos B = \frac{A'^2 + C'^2 - B'^2}{2A'C'}$$

$$\cos C = \frac{A'^2 + B'^2 - C'^2}{2A'B'}$$



مثال/ في $\triangle ABC$: اذا كان $\measuredangle C = 60^\circ$ ، $B' = 7cm$ ، $A' = 8cm$ اوجد C' .

الحل/ $C'^2 = A'^2 + B'^2 - 2A'B'\cos C$

$C'^2 = 64 + 49 - 2(8)(7)\cos 60^\circ$

$= 113 - 112 \times \frac{1}{2} = 113 - 56 = 57$

$\therefore C' = \sqrt{57} = 7.5 \; cm$

ثانياً : قانون الجيوب

(أ) اذا علم منه طول ضلع وقياس زاويتين من زواياه .

(ب) اذا علم طول ضلعين وقياس تقابل زاوية احدهما . وفي هاتين الحالتين يطبق قانون الجيوب :

$$\frac{A'}{\sin A} = \frac{B'}{\sin B} = \frac{C'}{\sin C}$$

مثال المثلث ABC ، فيه AB = 9 cm ، BC = 10 cm ، CA = 8 cm جد قياس كل من الزوايا A , B , C

الحل بتطبيق قانون جيوب تمام في هذه الحالة

$$A'^2 = B'^2 + C'^2 - 2B'C' \cos A$$

$$100 = 64 + 81 - 2(8)(9) \cos A$$

وباستخدام الحاسبة

$$\cos A = \frac{45}{144} = 0.3125 \Rightarrow m\angle A = 71^\circ 47'$$

وبالمثل نجد $m\angle B = 49^\circ 27'$, $m\angle C = 58^\circ 46'$

ملاحظة: لحل المثلث ABC اذا علم ضلعان والزاوية المقابلة لأحدهما نوجد ما يلي :

اولاً : اذا علم الضلعان B' ، C' والزاوية $\hat{C}$ يكون للمثلث حلان وبالشروط الآتية : $C' < B' \sin C$ ، $B' < C'$ ، $\hat{C}$ حادة

ثانياً : يكون للمثلث حلاً واحداً فقط بأحد الشروط الآتية :

1. $C' = B' \sin C$ ، $\hat{C}$ حادة (يكون المثلث قائم الزاوية في B)
2. $B' = C'$ ، $\hat{C}$ حادة (يكون المثلث ABC متساوي الساقين)
3. $B' < C'$ ، $\hat{C}$ منفرجة أو حادة .

ثالثاً : ليس للمثلث حل حقيقي في كل مما يأتي :

1. $C' > B' \sin C$ ، $\hat{C}$ حادة .
2. $B' < C'$ ، $\hat{C}$ منفرجة .

مثال اذكر الحلول الممكنة لكل من المثلثات الآتية

1. $B' = 10 \text{ cm}$, $C' = 5 \text{ cm}$, $m\angle C = 30^\circ$

الجواب: للمثلث حل واحد ويكون $\triangle ABC$ قائم الزاوية في B

لأن $B' \sin C = 10 \sin 30^\circ = 5 \text{ cm}$, $C' = 5 \text{cm}$

2. $A' = 15 \text{cm}$, $B' = 16 \text{cm}$, $m\angle B = 52^\circ$

الجواب: للمثلث حل واحد لأن: $a' < b'$ ، $\hat{B}$ حادة

③ $b' = 9\sqrt{2}\ cm \ , \ c' = 11\ cm \ , \ m\angle C = 45^\circ$

الجواب: للمثلث حلان لأنه توافرت الشروط: $\hat{C}$ حادة ، $b' > c'$ ، $c' > b\sin C$

④ $a' = 35\ cm \ , \ c' = 35\ cm \ , \ m\angle C = 77^\circ$

الجواب: للمثلث حل واحد فقط (المثلث متساوي الساقين)

⑤ $c' = 13\ cm \ , \ a' = 17\ cm \ \ m\angle A = 150^\circ$

الجواب: للمثلث حل واحد فقط لأن $\hat{A}$ منفرجة $c' < a'$

⑥ $b' = 6\ cm \ \ c' = 8\ cm \ \ m\angle B = 65^\circ$

الجواب: لا يوجد حل حقيقي للمثلث لأن $b' < c'\sin B$

مثال حل المثلث ABC الذي فيه $c' = 274\ cm, b' = 132\ cm, m\angle C = 65^\circ$

الحل/ $\hat{C}$ حادة ، $b' < c'$ يوجد للمثلث حل واحد فقط.

$$\frac{c'}{\sin C} = \frac{b'}{\sin B} \Rightarrow \frac{247}{\sin 65^\circ} = \frac{132}{\sin B}$$

$$\therefore \sin B = \frac{132 \times \sin 65^\circ}{247} \cong 0.484$$

$$\therefore m\angle B = 29^\circ$$

$$\therefore m\angle A = 180^\circ - (65^\circ + 29^\circ) = 86^\circ$$

$$\frac{a'}{\sin A} = \frac{c'}{\sin C} \Rightarrow a' = \frac{c'\sin A}{\sin C}$$

$$\therefore a' = \frac{247\sin 86^\circ}{\sin 65^\circ} \cong 252.69\ cm$$

استخدام الحاسبة

تمارين (7 - 5)

① أحسب مساحة حديقة على شكل مثلث BCD حيث طول CD يساوي 50m

$m\angle D = 63^\circ \quad , \quad m\angle C = 52^\circ$

الحل/

$m\angle B = 180^\circ - (63^\circ + 52^\circ) = 65^\circ$

$\frac{C'}{\sin 52} = \frac{B'}{\sin 65} \Rightarrow C' = \frac{B' \sin 52^\circ}{\sin 65^\circ}$

$\therefore C' = \frac{50(0.99)}{(0.83)} \cong 59.63 \text{ cm}$

$\frac{D'}{\sin 63} = \frac{B'}{\sin 65} \Rightarrow D' = \frac{B' \sin 63}{\sin 65} = \frac{50(0.84)}{0.83}$

$\therefore D' \cong 50.34 \text{ m}$

ننزل من B عمود h على DC ولتكن $DA = x$

$\therefore AC = 50 - x$

$h^2 = C'^2 - x^2 \Rightarrow h^2 = 3556 - x^2$ ---- ① في كل من المثلثين القائمين

$h^2 = D'^2 - (50 - x)^2 = 2534 - (50 - x)^2$ ---- ② كذلك

من ① و ② نجد أن:

$3556 - x^2 = 2534 - (50 - x)^2$

$3556 - x^2 = 2534 - 2500 + 100x - x^2$

$\therefore 100x = 3522 \Rightarrow x = 35.22 \text{ m}$

$\therefore h^2 = 3556 - 1240.45 \Rightarrow h = 48.12 \text{ m}$ الارتفاع

مساحة المثلث $= \frac{1}{2}$ طول القاعدة $\times$ الارتفاع .

$\therefore \text{Area} = \frac{1}{2} \times 50 \times 48.12 \cong 1203 \text{ m}^2$ مساحة المثلث

---

② حل المثلث ABC فيه $m\angle A = 30^\circ , m\angle B = 45^\circ , A' = 20\text{cm}$
ثم احسب مساحته ؟

الحل/

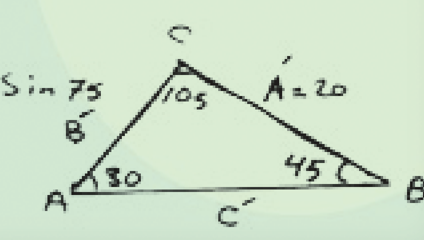
$m\angle C = 180^\circ - (30^\circ + 45^\circ) = 105^\circ$

$\frac{A'}{\sin A} = \frac{C'}{\sin 105^\circ} \Rightarrow \frac{20}{\sin 30} = \frac{C'}{\sin 105^\circ}$

نحول إلى $\sin(180 - 75) = \sin 75$

$C' = \frac{20 \sin 75^\circ}{\sin 30}$

$\therefore C' = \frac{20(0.92)}{0.5} \cong 36.9 \text{ cm}$



$$\frac{B'}{\sin 45} = \frac{A'}{\sin 30^\circ} \Rightarrow B' = \frac{A' \sin 45}{\sin 30} = \frac{20(0.65)}{0.5}$$

$\therefore B' = 25.97$ cm

لإيجاد مساحة المثلث نجد الارتفاع h ننزل من C عمود على AB ثم نجد طوله بنفس الطريقة السابقة ونطبق مساحة المثلث $= \frac{1}{2} \times$ القاعدة $\times$ الارتفاع

---

③ حل المثلث ABC اذا كان $A' = 2\sqrt{2}$ ، $B' = 4$ ، $m\angle A = 30^\circ$ مع بحث الاحتمالات الممكنة للحل ثم جد مساحة أصغر المثلثين بالمساحة.

الحل/

$\hat{A}$ حادة ، $B' \sin A = 4(\frac{1}{2}) = 2$

$\therefore A' > B' \sin A \Rightarrow$ للمثلث حلان حقيقيان

$$\therefore \frac{A'}{\sin A} = \frac{B'}{\sin B} \Rightarrow \frac{2\sqrt{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{4}{\sin B} \Rightarrow \sin B = \frac{4 \times \frac{1}{2}}{2\sqrt{2}}$$

$\therefore \sin B = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \hat{B} = 45^\circ$ or $B = 135^\circ$

$\therefore m\angle B = 45^\circ \Rightarrow m\angle C = 180^\circ - (45^\circ + 30^\circ) = 105^\circ$

or $m\angle B = 135^\circ \Rightarrow m\angle C = 180^\circ - (135^\circ + 30^\circ) = 15^\circ$

$$\therefore \frac{A'}{\sin A} = \frac{C'}{\sin C} \Rightarrow \frac{2\sqrt{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{C'}{0.9969} \Rightarrow C' = \frac{2\sqrt{2}(0.9969)}{\frac{1}{2}}$$

$C' = 5.6$ cm or $C' = ?$ قيمة اخرى لو أخذنا $m\angle C = 15^\circ$

ثم نجد مساحة المثلث ABC وهو الأصغر وبنفس الطريقة السابقة.

---

④ ابتدأت سيارتان بالحركة من مكان واحد فاذا سارت الاولى في اتجاه الجنوب وبسرعة منتظمة 50km/h . وسارت الثانية في اتجاه الشمال الشرقي وبسرعة منتظمة 60km/h . اوجد البعد بين السيارتين بعد ثلاث ساعات من بدء الحركة .

الحل/

$50 \times 3 = 150$ km قطعت السيارة الاولى

$60 \times 3 = 180$ km قطعت السيارة الثانية

$m\angle A = 45^\circ + 90^\circ = 135^\circ$

$A' =$ المسافة بين السيارتين بعد مرور 3 ساعات من بدء حركتهما باستخدام قانون جيب تمام

$A'^2 = B'^2 + C'^2 - 2B'C' \cos A$

$A'^2 = (180)^2 + (150)^2 - 2(180)(150) \cos 135°$

$A'^2 = 32400 + 22500 + 54000 \cos 45$

$= 54900 + 76367.5 = 131267.5$

$\therefore A' = 362.3\ km$ المسافة بين السيارتين بعد مرور 3 ساعات.

---

⑤ بين مع ذكر السبب ما اذا كان لكل مثلث من المثلثات التالية حل واحد او حلان او لا حل له.

ⓐ $B' = 20cm$, $C' = 10cm$, $m\angle C = 30°$

الجواب/ $B' \sin C = 20 \sin 30° = 20 \times \frac{1}{2} = 10$

$\therefore C' = B' \sin C$ $\hat{C}$ حادة

$\therefore$ للمثلث حل واحد فقط ، قائم في $\hat{B}$.

ⓑ $C' = 18m$, $A' = 13m$, $m\angle A = 40°$

الجواب/ $A' < C'$ ، $\hat{A}$ حادة ، $C' \sin A = 18 \sin 40 = 10.48$

$\therefore A' < C' \sin A$, $A' < C'$ $\hat{A}$ حادة $\therefore$ للمثلث حلان

ⓒ $A' = 14\ cm$, $B' = 15\ cm$, $m\angle B = 50°$

الجواب/ $A' < B'$, $A' \sin B = 14 \times \sin 50° = 9.899$

$\hat{B}$ حادة ، $B' > A' \sin B$ $\therefore$ ليس للمعادلة حل حقيقي

ⓓ $A' = 13\ m$, $B' = 20m$ $m\angle B = 110°$

الجواب/ $\hat{B}$ منفرجة $B' > A'$, $A' \sin B = 13 \times 0.9876 = 12.8$

$\therefore B' > A' \sin B$ للمعادلة حل واحد فقط

ⓔ $C' = 10\ cm$, $A' = 7\ cm$ $m\angle A = 60°$

$A' < C'$, $\hat{A}$ حادة $C' \sin A = 10 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$

$\therefore\ \acute{A} > \acute{C}\ \sin A$ للمعادلة حلان

---

(٤) $\acute{B} = 17\ m\ ,\ \acute{C} = 17\ m\ ,\ m\angle C = 20^\circ$

للمثلث حل واحد (المثلث متساوي الساقين)

---

(6) ABCD متوازي أضلاع ، طول الضلعين المتجاورين فيه 20cm ، 10cm . واحدى زواياه 120° جد طول كل من قطريه .

نستخدم قانون الجيب تمام

$$(DB)^2 = (AD)^2 + (AB)^2 - 2\,(AD)(AB)\cos A$$

$$(DB)^2 = 100 + 400 - 2(10)(20)\cos 120^\circ$$

$$= 500 + 400 \times \tfrac{1}{2} = 700$$

$\therefore DB = \sqrt{700} = 26.46\ cm$ طول القطر الكبير

$$(AC)^2 = (DC)^2 + (BC)^2 - 2(DC)(BC)\cos 60^\circ \Rightarrow$$

$AC = 17.3\ cm$ طول القطر الصغير

---

(7) ABCDEF شكل سداسي منتظم ، طول احد اضلاعه (20cm) جد مساحة المنطقة المثلثة ACE

$2 \times 360^\circ = 720 \div 60 = 120^\circ$ قياس كل زاوية

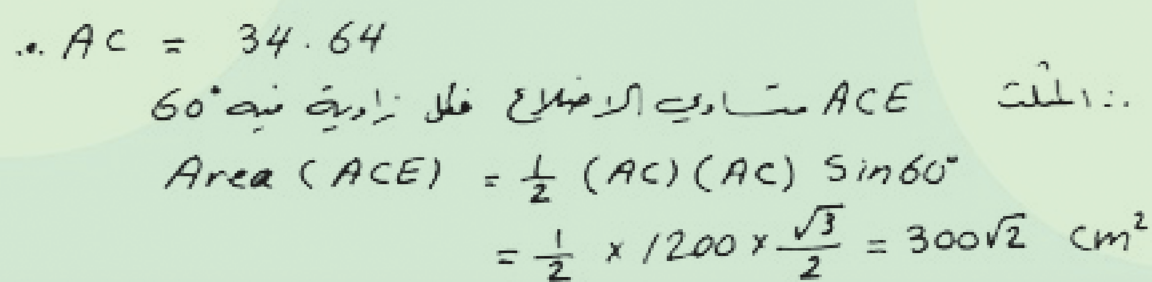
من رأس الشكل السداسي (مثلثين رباعيين)

$$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2 - 2(AB)(BC)\cos 120^\circ$$

$$= 400 + 400 + 2(20)(20)\cos 60^\circ$$

$$= 800 + 400 = 1200$$

$\therefore AC = 34.64$



$\therefore$ المثلث ACE متساوي الاضلاع فكل زاوية فيه 60°

$$Area\,(ACE) = \tfrac{1}{2}(AC)(AC)\sin 60^\circ$$

$$= \tfrac{1}{2} \times 1200 \times \tfrac{\sqrt{3}}{2} = 300\sqrt{2}\ cm^2$$

رسم منحنيات الدوال المثلثية :

اولاً / رسم منحني جيب الزاوية ($y = \sin x$)

$y = \sin x$

خواص منحني الجيب :

المجال $[0, 2\pi]$

1. يقطع منحني الجيب محور السينات عند $x = \mp 2\pi$ ، $x = \mp\pi$ ، $x = 0$
2. اكبر قيمة للجيب عند $x = \frac{\pi}{2}$ وتساوي 1 كذلك عند $x = -\frac{3\pi}{2}$
3. اصغر قيمة للجيب عند $x = -\frac{\pi}{2}$ وتساوي -1 كذلك عند $x = \frac{3\pi}{2}$
4. عندما $x \in (0, \pi)$ تكون قيمة $\sin x$ موجبة كذلك $x \in (-2\pi, -\pi)$ والمنحني يقع فوق محور السينات .
5. عندما $x \in (\pi, 2\pi)$ تكون قيمة $\sin x$ سالبة كذلك $x \in (-\pi, 0)$ والمنحني يقع اسفل محور السينات .
6. لو رسمنا $y = \sin x$ في الفترة $[2\pi, 4\pi]$ نجد ان المنحني يتكرر بالاتجاه الموجب لمحور السينات وهكذا ومثل هذه الدالة تسمى (دورية) والفترة التي يكرر فيها المنحني نفسه (2π) تسمى (دورة الدالة)

التردد $= \frac{1}{\text{دورة الدالة}}$ ويسمى التردد ويسمى العدد $= \frac{1}{2}$ (اكبر قيمة - اصغر قيمة)

سعة الدالة اي سعة الدالة $= \frac{1}{2}(1-(-1)) = \frac{1}{2} \times 2 = 1$

مثال / ارسم بيان الدالة $y = 4\sin x$ ثم جد ⓐ الدورة ⓑ التردد ⓒ السعة .

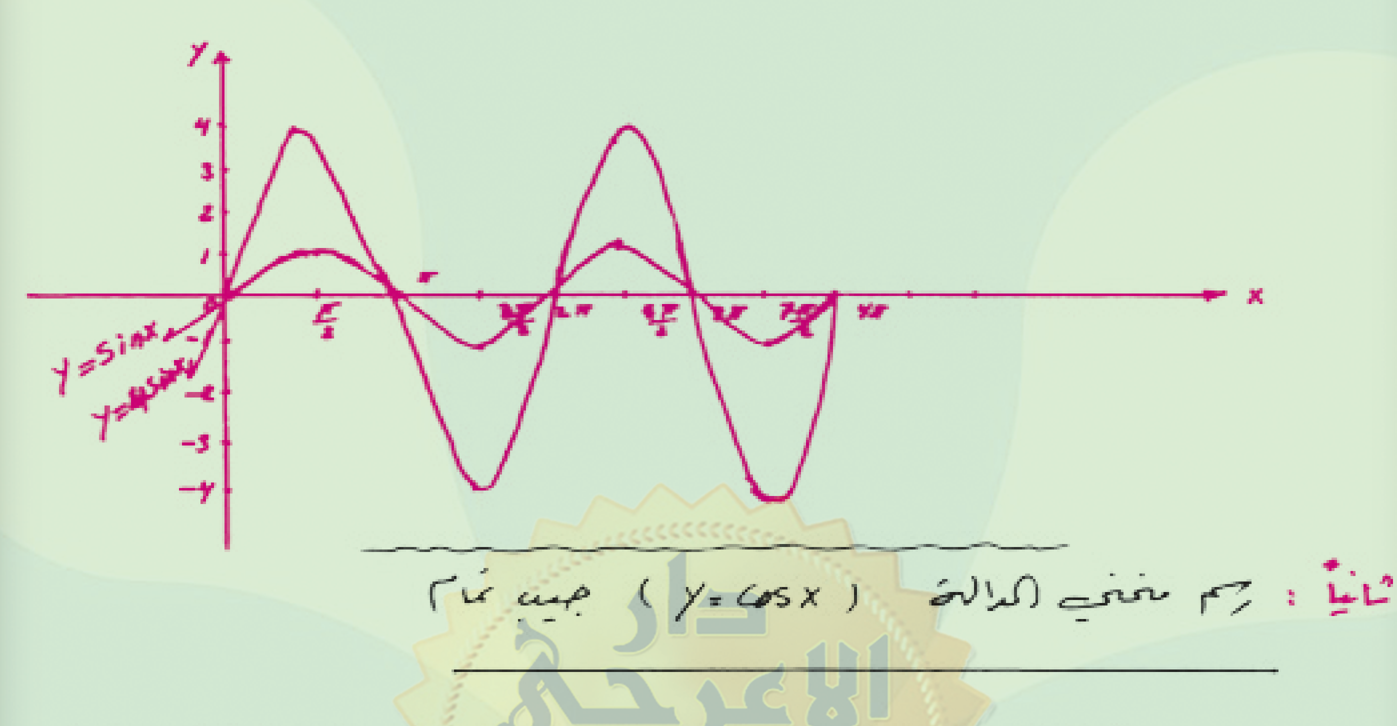
الحل /

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{5\pi}{2}$	3π	$\frac{7\pi}{2}$	4π
$\sin x$	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0
$4\sin x$	0	4	0	-4	0	4	0	-4	0

الحل / ⓐ دورة الدالة $= 2\pi$

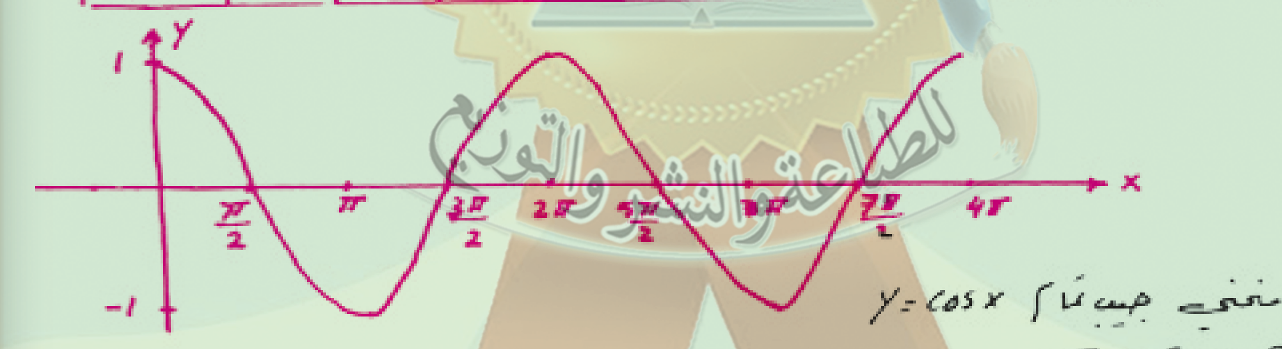
ⓑ التردد $= \frac{1}{2\pi}$

ⓒ السعة $= \frac{1}{2}(4-(-4)) = 4$



ثانياً : رسم منحني الدالة ($Y=\cos x$) جيب تمام

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{5\pi}{2}$	3π	$\frac{7\pi}{2}$	4π
cos x	1	0	−1	0	1	0	−1	0	1



منحني جيب تمام $Y=\cos x$

الدورة $= 2\pi$

التردد $= \frac{1}{2\pi}$ السعة $= 1$

خواص منحني الدالة $Y=\cos x$ في الفترة $[0, 2\pi]$

① يقطع محور السينات عند $x=\frac{\pi}{2}$ ، $x=\frac{3\pi}{2}$

② اكبر قيمة للجيب تمام عند $x=0$ ، $x=2\pi$ وتساوي 1

③ أصغر قيمة للجيب تمام عند $x=\pi$ وتساوي −1

④ عندما $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ يكون المنحني موجباً وفوق محور السينات .

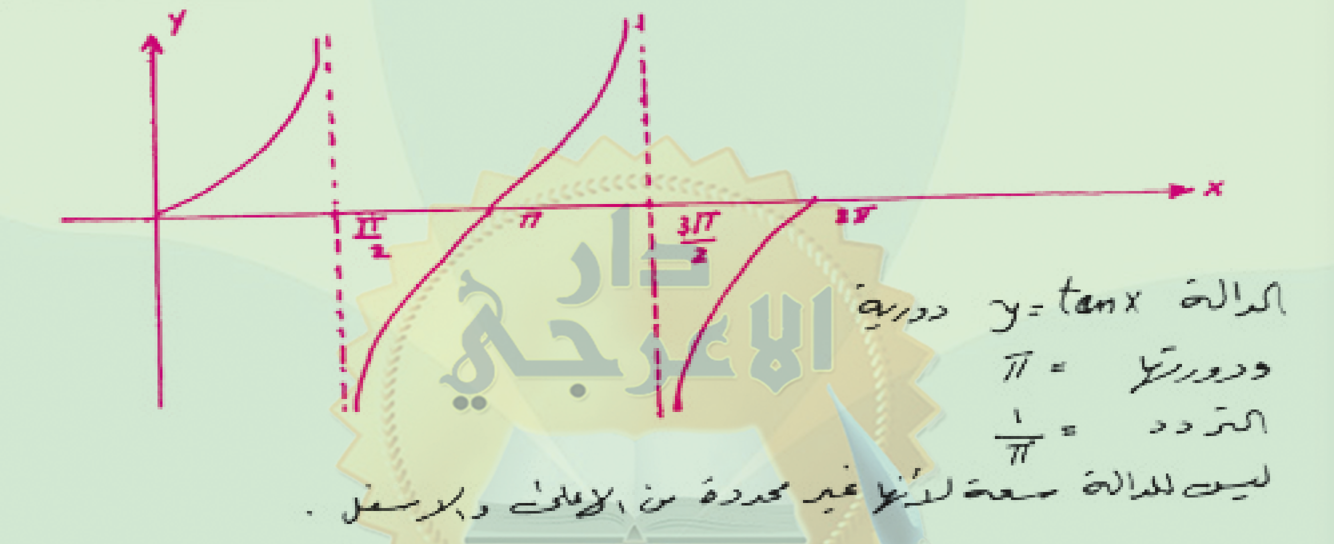
⑤ عندما $x\in(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$ يكون المنحني سالباً واسفل محور السينات .

وعندما $x\in(\frac{3\pi}{2},2\pi)$ يكون المنحني موجباً واعلى محور السينات .

وهكذا يتكرر المنحني

ثالثاً : رسم منحني دالة الظل ($y = \tan x$)

x	0	30°	60°	90° ($\frac{\pi}{2}$)	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°	360°
$\tan x$	0	0.6	1.7	غير معرف	−1.7	−0.6	0	0.6	1.7	غير معرف	−1.7	−0.6	0



الدالة $y = \tan x$ دورية

ودورتها $= \pi$

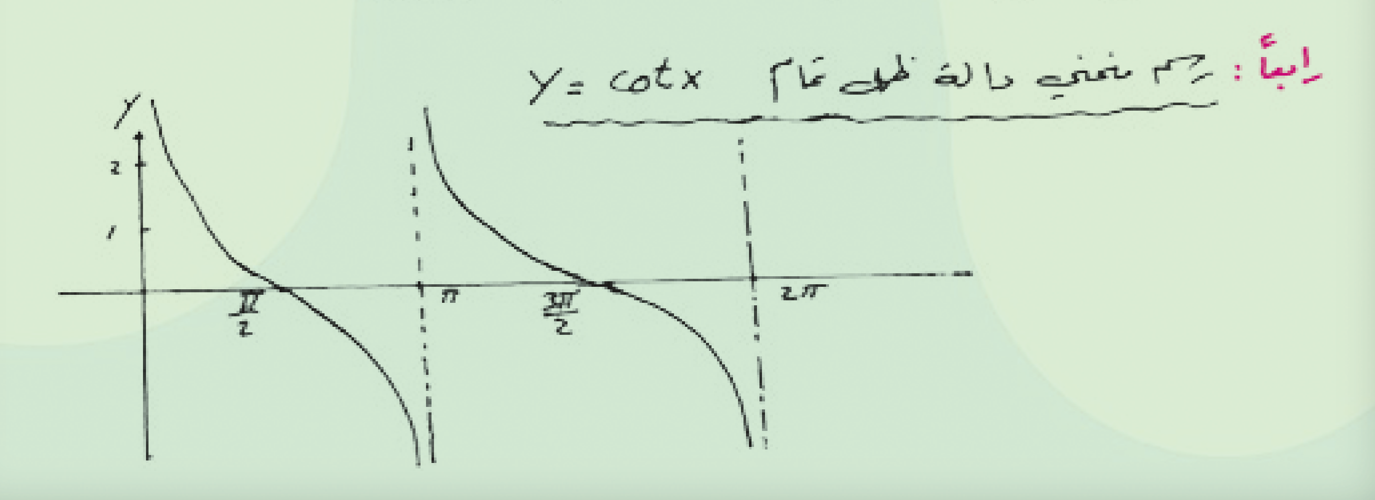
التردد $= \frac{1}{\pi}$

ليس للدالة سعة لأنها غير محددة من الأعلى والأسفل .

خواص منحني دالة الظل $y = \tan x$

1. يقطع المحور السيني عندما $x = 0, 180°, 360°$
2. المنحني غير متصل كما في منحني الجيب وجيب تمام
3. عندما تكون $x \in (0, 90°)$ يكون الظل موجباً وكلما اقتربنا من $x = 90°$ نجد قيمة الظل تزداد ازدياداً كبيراً .
4. عندما $x \in (90°, 180°)$ يكون الظل سالباً وعندما x تقع بين 180° و 270° يكون الظل موجباً ويكون سالباً عندما $x \in (180°, 360°)$

رابعاً : رسم منحني دالة الظل تمام $y = \cot x$



الخواص :

1. يقطع محور السينات عند $x = \frac{\pi}{2}$ ، $x = \frac{3\pi}{2}$
2. المنحني غير متصل .
3. عندما تكون $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ نجد ظل تمام موجب وعندما $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ نجد أنها سالب وعندما $x \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$ يصبح موجباً وعندما $x \in (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$ يكون سالباً وهكذا تكرار .

خامساً : رسم منحني قاطع الزاوية $y = \sec x$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\sec x$	1	1.2	1.4	2	غير معرفة	-2	-1.2	-1	-1.2	-2	غير معرفة	2	1.2	1



خواص منحني القاطع

1. لا يقطع منحني القاطع محور السينات على الإطلاق .
2. عندما x ما بين 0 و $\frac{\pi}{2}$ يكون المنحني موجبة
3. عندما x ما بين $\frac{\pi}{2}$ و $\frac{3\pi}{2}$ يكون المنحني سالباً .
4. عندما x ما بين $\frac{3\pi}{2}$ و 2π يكون المنحني موجبة
5. المنحني غير متصل
6. المنحني غير محدود لا من الأعلى ولا من الأسفل لذا ليس له سعة .

سادساً : رسم منحني قاطع التمام $y = \csc x$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\csc x$	غير معرفة	2	1.4	1.2	1	1.2	2	غير معرفة	-2	-1.2	-1	-1.2	-2	غير معرفة

$y = \csc x$

خواص منحني قاطع التمام

1. المنحني لا يقطع محور السينات.
2. عندما x ما بين 0 الى π يكون المنحني موجباً اعلى محور السينات
3. عندما x ما بين π الى 2π يكون المنحني سالباً اسفل محور السينات
4. المنحني غير متصل
5. دورة المنحني 2π والتردد $\frac{1}{2\pi}$
6. المنحني غير محدود لا من الاعلى ولا من الاسفل اي ليس له سعة.

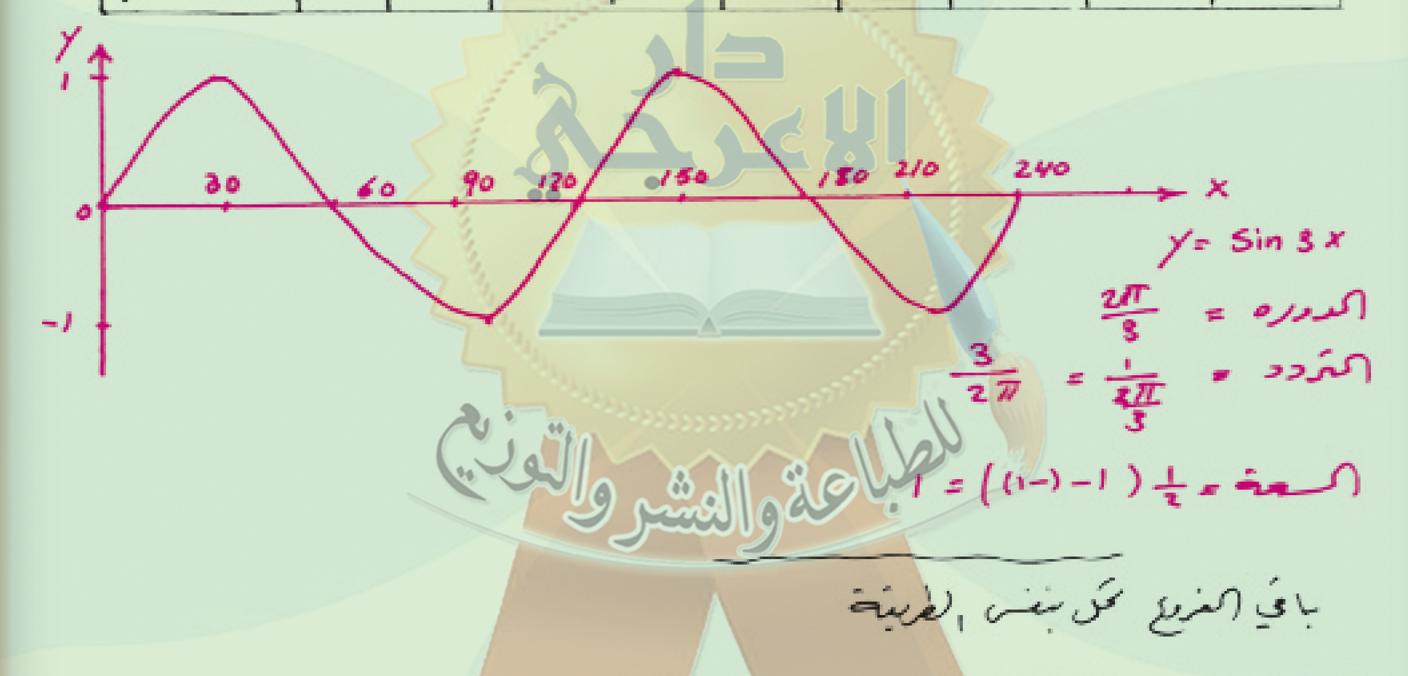


تماين (8 - 5)

① ارسم بيانات كل من الدوال الآتية ، ومن الرسم استنتج كلاً من دورة الدالة وترددها وسعتها .

① $y = \sin 3x$ on $[0, \frac{4\pi}{3}]$

	0	30	60	90	120	150	180	210	240
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$
Sin x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$y = \sin 3x$	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0



الدوره $= \frac{2\pi}{3}$

التردد $= \frac{1}{\frac{2\pi}{3}} = \frac{3}{2\pi}$

السعة $= \frac{1}{2}(1 - (-1)) = 1$

باقي الفروع تحل بنفس الطريقة

---

② اختبار موضوعي .

① ضع اشارة + أو − في المستطيلات التالية لتحصل على عبارة صحيحة :

ⓐ $\cos(20^\circ + 50^\circ) = \cos 20^\circ \cos 50^\circ \boxed{-} \sin 20^\circ \sin 50^\circ$

ⓑ $\tan(3A - 2B) = \tan \boxed{-} \tan 2B \,/\, 1 \boxed{+} \tan 3A \tan 2B$

ⓒ $\sin(80^\circ \boxed{-} 10^\circ) = \sin 80^\circ \cos 10^\circ - \cos 80^\circ \sin 10^\circ$

② اكمل ما يأتي لتحصل على عبارة صحيحة

ⓐ $\sin(40^\circ + 180^\circ) = \sin 40^\circ \boxed{\cos 180} + \boxed{\cos 40^\circ} \sin 180^\circ$

ⓑ $2 \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{3} = \sin \boxed{\frac{2\pi}{3}}$

ⓒ $\frac{2 \tan x/3}{1 - \tan^2 x/3} = \underline{\tan 2x/3}$

ⓓ $\cos^2 15 - \sin^2 15 = \cos\boxed{30^\circ}$

③ عيّن العبارات الصحيحة والعبارات الخاطئة فيما يأتي:

ⓐ $\sin 6x = 2\sin 3x$ خاطئة

$\sin 6x = 2\sin 3x \cos 3x$ والصحيحة

ⓑ $\sin 15^\circ \cos 15^\circ = \sin 30^\circ$ خاطئة

$2\sin 15^\circ \cos 15^\circ = \sin 30^\circ$ والصحيحة

ⓒ $\cos 80^\circ = \cos^2 40^\circ - \sin^2 40^\circ$ صحيحة

ⓓ مجموعة حل المعادلة $2\cos x + 3 = 0$ هي ϕ

صحيحة لان $-1 \leq \cos x \leq 1$

④ اختر من القائمة A ما يناسبها من القائمة B

القائمة A	القائمة B
① $\cos 4A \cos A - \sin 4A \sin A = b$	ⓐ $\sin 5A$
② $\sin A \cos 4A - \sin 4A \cos A = c$	ⓑ $\cos 5A$
③ $\sin 4A \cos A + \cos 4A \sin A = a$	ⓒ $\sin 3A$
	ⓓ $\sin(-3A)$

⑤ اختبار شامل

① اذا كان $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ وكانت $\cos x = \frac{2}{3}$ فأوجد قيمة كل من: $\csc x$ ، $\sec x$ ، $\cot x$.

الحل/

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ علاقة

$\sin^2 x + \frac{4}{9} = 1 \Rightarrow \sin^2 x = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$

$\therefore \sin x = \pm \frac{\sqrt{5}}{3}$ x تقع في الربع الرابع

$\therefore \sin x = -\frac{\sqrt{5}}{3}$

$\therefore \csc x = \frac{1}{\sin x} = -\frac{3}{\sqrt{5}}$

$\sec x = \frac{1}{\cos x} = \frac{3}{2}$

$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\frac{2}{3}}{-\frac{\sqrt{5}}{3}} = -\frac{2}{\sqrt{5}}$

② اذا كان $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ وكانت $\cos x = \frac{3}{5}$ نأوجد قيمة كل من :

$\cos 2x$ ، $\sin 2x$ ، $\tan 2x$ ، $\sin \frac{x}{2}$ ، $\cos \frac{x}{2}$

الحل/

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ علاقة

$\therefore \sin^2 x + \frac{9}{25} = 1 \rightarrow \sin^2 x = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$

$\therefore \sin x = \pm \frac{4}{5}$ x تقع في الربع الرابع

$\therefore \sin x = -\frac{4}{5}$

* $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \frac{9}{25} - \frac{16}{25} = \frac{-7}{25}$ وتوجد ايضاً طريقتان اخريتان لايجاد $\cos 2x$

* $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

$= 2\left(-\frac{4}{5}\right)\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{-12}{25}$

* $\tan 2x = \frac{\sin x}{\cos x}$

$= \frac{-4/5}{3/5} = -\frac{4}{3}$

* $\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2} = \frac{1 - 3/5}{2} = \frac{1}{5}$

$\therefore \sin x/2 = \pm \frac{1}{\sqrt{5}} \rightarrow \sin x/2 = + \frac{1}{\sqrt{5}}$

* $\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2} = \frac{1 + 3/5}{2} = \frac{4}{5}$

$\therefore \cos \frac{x}{2} = -\frac{2}{\sqrt{5}}$ $135 < x < 180$ $\frac{x}{2}$ تقع في الربع الثاني

---

③ بدون استخدام الحاسبة اوجد قيمة :

ⓐ $\sin \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\left(2 \sin \frac{\pi}{8} \cdot \cos \frac{\pi}{8}\right)$

$= \frac{1}{2} \sin 2\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{4}$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

ⓑ $\cos^2 \frac{\pi}{12} - \sin^2 \frac{\pi}{12} = \cos 2\frac{\pi}{12} = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

---

④ اثبت صحة كل من المتطابقات الآتية :

ⓐ $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos 2x$

الاثبات :

$L.H = (\cos^2 x + \sin^2 x)(\cos^2 x - \sin^2 x)$

$= 1 \cdot \cos 2x = \cos 2x$

$\therefore L.H = R.H$

ⓑ $\tan \frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{\sin x}$

الإثبات: بضرب البسط والمقام في مرافق المقام

$L.H = \tan \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x} \cdot \frac{1-\cos x}{1-\cos x}}$

$= \sqrt{\frac{(1-\cos x)^2}{1-\cos^2 x}} = \sqrt{\frac{(1-\cos x)^2}{\sin^2 x}} = \frac{1-\cos x}{\sin x}$

$\therefore L.H = R.H$

سؤال/ في المثلث ABC أثبت ما يلي: $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$

الحل/الإثبات/

$A + B + C = 180^\circ \Rightarrow A + B = 180^\circ - C$

$\therefore \tan(A+B) = \tan(180^\circ - C) \Rightarrow$

$\frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = -\tan C \Rightarrow$

$\tan A + \tan B = -\tan C(1 - \tan A \tan B) \Rightarrow$

$\therefore \tan A + \tan B = -\tan C + \tan A \tan B \tan C \Rightarrow$

$\therefore \tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$

أسئلة الثانية محلولة:

① اثبت أن:

ⓐ $\sec^2 x = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{1 - \sin^2 x}$

الحل/

$L.H = \sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{1 - \sin^2 x} = R.H$

$\therefore L.H = R.H$

ⓑ $\frac{\sin 2x}{2\sin x} = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}$

$x = 2 \cdot \frac{x}{2}$ معادلة بنصف الزاوية

$L.H = \frac{2\sin x \cos x}{2\sin x} = \cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}$

$\therefore L.H = R.H$

② اذا كان $0 < x < \frac{\pi}{2}$ وكان $\tan x = \frac{3}{4}$ نجد قيمة $\tan 2x$ ، $\tan \frac{x}{2}$

الحل

$\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$ علاقة

$\frac{9}{16} + 1 = \sec^2 x \Rightarrow \frac{25}{16} = \sec^2 x$

$\therefore \sec x = \frac{5}{4}$ لان x في الربع الاول

$\therefore \cos x = \frac{1}{\sec x} = \frac{4}{5}$

$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x} = \frac{2\left(\frac{3}{4}\right)}{1 - \frac{9}{16}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{7}{16}} = \frac{3}{2} \times \left(\frac{16}{7}\right)$$

$\therefore \tan 2x = \frac{24}{7}$

$$\tan \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{4}{5}}{1 + \frac{4}{5}}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{5}}{\frac{9}{5}}} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$$

اسئلة اثرائية غير محلولة:

① اذا كانت $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ وكانت $\cos x = -\frac{12}{13}$ جد قيم النسب المثلثية للزاوية 2x

② اثبت صحة المتطابقة $\cos(A - B) - \cos(A + B) = 2\sin A \sin B$

③ حل المعادلة التالية: $0 \leq x \leq 2\pi$ ، $\tan^2 x = \tan x$

④ حل المعادلة التالية $0 \leq x \leq 2\pi$ ، $4\tan x = \sqrt{3}\sec^2 x$

⑤ برهن على صحة المتطابقة: $\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} = \sqrt{\frac{1 - \sin 2x}{1 + \sin 2x}}$

الحل

$$L.H = \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} \cdot \frac{\cos x + \sin x}{\cos x + \sin x} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{(\cos x + \sin x)^2}$$

$$= \frac{\cos 2x}{\cos^2 x + 2\cos x \sin x + \sin^2 x} = \frac{\cos 2x}{(\cos^2 x + \sin^2 x) + 2\cos x \sin x}$$

$$= \frac{\cos 2x}{1 + 2\sin 2x}$$

$$R.H = \sqrt{\frac{1 - \sin 2x}{1 + \sin 2x} \cdot \frac{1 + \sin 2x}{1 + \sin 2x}} = \sqrt{\frac{1 - \sin^2 2x}{(1 + \sin 2x)^2}} = \frac{\cos 2x}{1 + \sin 2x}$$ $\therefore L.H = R.H$

⑥ اثبت صحة المتطابقة

$$\cot(A+B) = \frac{\cot A \cot B - 1}{\cot A + \cot B}$$

الحل

$$L.H: \cot(A+B) = \frac{\cos(A+B)}{\sin(A+B)} = \frac{\cos A \cos B - \sin A \sin B}{\sin A \cos B + \sin B \cos A}$$

ونقسم البسط والمقام على $\sin A \sin B$

$$= \frac{\frac{\cos A \cos B}{\sin A \sin B} - 1}{\frac{\sin A \cos B}{\sin A \sin B} + \frac{\sin B \cos A}{\sin A \sin B}} = \frac{\cot A \cot B - 1}{\cot B + \cot A}$$

$\therefore$ L.H = R.H

---

⑦ حل المعادلات التالية حيث $0° \leq x < 360°$

ⓐ $30\cos^2 x - 11\cos x + 1 = 0$

الحل/

$(5\cos x - 1)(6\cos x - 1) = 0$

either $5\cos x - 1 = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{5}$

يكون cos موجب في الربع الاول والرابع

$x = 78°$ Q_1 , $x = 282$ Q_4

or $6\cos x - 1 = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{6}$

$x = 80°$ Q_1 , $x = 280°$ Q_4

$\therefore S = \{78°, 282°, 80°, 280°\}$

ⓑ $\cot^2 x - 7\cot x + 7 = 0$

ⓒ $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 1$

ⓓ $4\tan x = \sqrt{3}\sec^2 x$

$4\tan x = \sqrt{3}(\tan^2 x + 1)$

$4\tan x = \sqrt{3}\tan^2 x + \sqrt{3}$

$\therefore \sqrt{3}\tan^2 x - 4\tan x + \sqrt{3} = 0$

$(\sqrt{3}\tan x - 1)(\tan x - \sqrt{3}) = 0$

either $\sqrt{3}\tan x - 1 \Rightarrow \tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ or $\tan x - \sqrt{3} = 0 \Rightarrow \tan x = \sqrt{3}$

$x = 30°$ Q_1 , $x = 210°$ Q_3 $x = 60°$ Q_1 , $x = 240°$

$\therefore S = \{30°, 60°, 210°, 240°\}$

الفصل السادس
chapter 6

Limit and Continuity الغاية والاستمرارية

الرمز أو العلاقة الرياضية	المصطلح
$\lim_{x \to a} f(x)$	غاية الدالة $f(x)$ عندما $x \to a$
$\lim_{x \to b} f(x) = f(b)$	استمرارية $f(x)$ عند $x = b$

الغاية والاستمرارية :

غاية الدالة واستمراريتها Limit and continuity

اذا لاحظنا في الشكل المجاور نلاحظ نقطتين

$a \rightarrow \quad 3 \quad \leftarrow b$

a يسار العدد 3 ، b يمين العدد 3

فاذا اعطينا قيماً متزايدة الى a نلاحظها تقترب من العدد 3 ومن جهة اليسار ونكتب هذا الاقتراب بالشكل $a \rightarrow 3^-$ واذا انقصنا قيماً متناقصة الى b نلاحظ انها تقترب من العدد 3 ومن جهة اليمين ونكتب هذا الاقتراب بالشكل $b \rightarrow 3^+$

جوار العدد : neighbour hood

تعريف// اذا كان (a) عدداً (نقطة) على خط مستقيم وكان (ϵ) (تقرأ أبسلون) عدد موجب صغير .

تسمى الفترة :
1. $(a-\epsilon, a+\epsilon)$ جوار للعدد (a) (الجوار يحتوي a)
2. $(a-\epsilon, a]$ جوار أيسر للعدد (a) (الجوار يحتوي a)
3. $[a, a-\epsilon)$ جوار أيمن للعدد (a) (الجوار يحتوي a)

مثال// اذا كان $a = 1$ ، $\epsilon = \frac{1}{2}$ فإن :
1. $(1-\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ جوار للعدد 1
2. $(1-\frac{1}{2}, 1]$ جوار أيسر للعدد 1
3. $[1, 1+\frac{1}{2})$ جوار أيمن للعدد 1

غاية الدالة Limit of function

يرمز للغاية بالرمز (Lim) ولغاية الدالة $f(x)$ عندما x تقترب الى العدد a بالشكل $\lim_{x \to a} f(x)$. وتقرأ غاية الدالة $f(x)$ عندما x تقترب الى العدد a .

ملاحظة// كل دالة عندما نأخذ الغاية لها فنكتب الغاية من جهة اليمين ويعبر عنها بالشكل $\lim_{x \to a^+} f(x) = L_1$

والغاية من جهة اليسار ويعبر عنها بالشكل $\lim_{x \to a^-} f(x)$

اشارة الموجب (+) فوق a تعني الاقتراب من جهة اليمين $x \to a^+$

اشارة السالب (-) فوق a تعني الاقتراب من جهة اليسار $x \to a^-$

فاذا كانت الغاية من اليمين = الغاية من اليسار أي ان $L_1 = L_2$

فنقول توجد للدالة غاية عندما x تقترب من a ، فاذا كان :

$L_1 = L_2 = b$ بعد ذلك تكتب غاية الدالة بالشكل $\lim_{x \to a} f(x) = b$

وهذا يعني :

① وجود الغاية عند النقطة a يؤدي الى وجود غاية من اليسار وغاية من اليمين عند $x = a$ كلتاهما متساويتان .

② اذا وجدت غاية عند النقطة a من اليمين وغاية عند a من اليسار وكان $L_1 \neq L_2$ فأن الغاية عند a ليست موجودة او لا تكون معرّفة .

بعض مبرهنات الغاية :

① اذا كان N جوار للعدد a وكانت الدالة معرّفة $\forall x \in N/\{a\}$

وكانت $f(x) = c$ حيث $c \in R$ ثابت فان :

$\lim_{x \to a} f(x) = c$ أي غاية الدالة الثابتة = الثابت نفسه .

امثلة: ① $\lim_{x \to 3} \sqrt{5} = \sqrt{5}$ ② $\lim_{x \to -1} \sqrt{2} = \sqrt{2}$

② اذا كان N جوار للعدد a وكانت الدالة $f(x) = x$ فان:

$$\lim_{x \to a} x = a$$

أمثلة: ① $\lim_{x \to 2} x = 2$ ② $\lim_{x \to -1} x = -1$

③ اذا كانت $\lim_{x \to a} f(x)$ موجودة ، $\lim_{x \to a} g(x)$ موجودة فان:

- $\lim_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x)$

غاية مجموع عدد منتهٍ من الدوال = مجموع غاية كل دالة

- $\lim_{x \to a} [c\, f(x)] = c \lim_{x \to a} f(x)$

غاية ثابت × دالة = الثابت × غاية الدالة .

- $\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$

غاية حاصل ضرب دالتين = غاية الدالة الاولى × غاية الدالة الثانية

- $\lim_{x \to a} [f(x) / g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) / \lim_{x \to a} g(x)$

حيث $g(x) \neq 0$

- $\lim_{x \to a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim_{x \to a} f(x)}$ حيث $\lim_{x \to a} f(x) \geq 0$

امثلة :

① $\lim_{x \to 3} (x+2) = \lim_{x \to 3} x + \lim_{x \to 3} 2 = 3+2 = 5$

② $\lim_{x \to a} x^2 = \lim_{x \to a} x \cdot \lim_{x \to a} x = a \cdot a = a^2$

لذلك :

$$\lim_{x \to a} x^n = a^n \quad \forall n \in Z^+$$

امثلة //

① $\lim_{x \to 2} x^3 = 2^3 = 8$

② $\lim_{x \to -1} (x^2 + 3x) = \lim_{x \to -1} x^2 + \lim_{x \to -1} 3x$

$= (-1)^2 + 3(-1) = 1 - 3 = -2$

③ $\lim_{x \to -2} \frac{2x^2-4}{x-1} = \frac{2(-2)^2-4}{-2-1} = \frac{8-4}{-3} = -\frac{4}{3}$

مثال لتكن $f(x) = \frac{|x-1|}{x-1}$, $x \neq 1$ جد ان امكن $\lim_{x \to 1} f(x)$

الحل/

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x-1} & x-1 \geq 0 \\ \frac{-(x-1)}{x-1} & x-1 < 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 1 \\ -1 & x < 1 \end{cases}$$

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1} 1 = 1 = L_1$

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1} -1 = -1 = L_2$

$\Rightarrow L_1 \neq L_2$

$\therefore \lim_{x \to 1} f(x)$ غير موجودة

مثال لتكن

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 4 & x \geq 1 \\ 5x & x < 1 \end{cases}$$

جد :

① $\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} (x^2+4) = 2^2 + 4 = 8$

② $\lim_{x \to 1} f(x)$

الحل/

الغاية من جهة اليمين:

$\lim_{x \to 1^+} (x^2+4) = 1^2 + 4 = 5 \quad L_1$

$\lim_{x \to 1^-} 5x = 5(1) = 5 \quad L_2$

$\therefore L_1 = L_2 \iff \lim_{x \to 1} f(x) = 5$ ∴ الغاية موجودة

مثال جد غاية الدالة $f(x) = \frac{x^3 - a^3}{x - a}$ عند $x = a$

الحل/

$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \frac{x^3 - a^3}{x - a}$

ملاحظة: نلاحظ أنه حينما نعوض عن قيمة x بالعدد a تصبح الغاية غير معرّفة لذلك قبل التعويض نلاحظ المقام إذا ساوى صفر عند التعويض فلا يجوز التعويض مباشرة إلا بعد تبسيط الكسر.

لذلك:

$\lim \frac{x^3 - a^3}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{(x-a)(x^2 - ax + x^2)}{(x-a)}$

$= \lim_{x \to a} (x^2 - ax + x^2) = a^2 + a \cdot a + a^2 = 3a^2$

مثال جد

① $\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x - 2} \cdot \frac{\sqrt{x} + \sqrt{2}}{\sqrt{x} + \sqrt{2}} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)}{(x-2)(\sqrt{x} + \sqrt{2})}$

الضرب x مرافقه للبسط

$= \lim_{x \to 2} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

---

② $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{(x-3)} = \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(x-2)}{(x-3)} = \lim_{x \to 3} (x-2) = 3 - 2 = 1$

مثال للتمكن

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 3 & x \le 2 \\ b - 2x & x > 2 \end{cases}$$

اذا كانت $\lim_{x \to 2} f(x) = 11$ جد قيمة $a, b \in R$

الحل/ بما ان الغاية موجودة فأن $L_1 = L_2$

اي $\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^-} f(x)$

$\therefore \lim_{x \to 2^+} (b - 2x) = 11 \Rightarrow b - 2(2) = 11 \Rightarrow b = \boxed{15}$

$\lim_{x \to 2^-} (ax^2 + 3) = 11 \Rightarrow a(2)^2 + 3 = 11 \Rightarrow 4a = 11 - 3$

$\therefore 4a = 8 \Rightarrow a = \frac{8}{4} = \boxed{2}$

مثال 2 أوجد

$\lim_{x \to 2} \left(2x^2 + \frac{3x}{x+1} + \sqrt{6x+4} + 5\right)$

$= \lim_{x \to 2} 2x^2 + \lim_{x \to 2} \frac{3x}{x+1} + \lim_{x \to 2} \sqrt{6x+4} + \lim_{x \to 2} 5$

$= 2(2)^2 + \frac{3(2)}{2+1} + \sqrt{6(2)+4} + 5$

$= 2(4) + 2 + 4 + 5 = 19$

---

limit of circular function : غاية الدوال الدائرية

مبرهنة 1

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$$

حيث x بالقياس الدائري

البرهان//

$cb <$ طول القوس $cd < dh$

$\Rightarrow \sin x < x < \tan x \Rightarrow$

$\frac{1}{\sin x} > \frac{1}{x} > \frac{1}{\tan x} \Rightarrow$

بالضرب × $\sin x$ $\left[\frac{1}{\sin x} > \frac{1}{x} > \frac{\cos x}{\sin x} \right. \Rightarrow$

$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x \Rightarrow \lim_{x \to 0} 1 > \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} > \lim_{x \to 0} \cos x$

$\Rightarrow 1 > \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} > 1$

$\therefore \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

مبرهنات غايات الدوال الدائرية :

① $\lim_{x \to 0} \sin x = 0$

② $\lim_{x \to 0} \sin ax = 0 \quad a \in R$

③ $\lim_{x \to 0} \cos x = 1$

④ $\lim_{x \to 0} \cos ax = 1$

⑤ $\lim_{x \to 0} \frac{\sin ax}{ax} = 1$

⑥ $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$

⑦ $\lim_{x \to 0} \frac{\tan ax}{ax} = 1$

⑧ $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0$

⑨ $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos ax}{ax} = 0$

مثال 1 جد

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{4x}$$

الحل/

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{4x} = \frac{1}{4} \lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{x} = \frac{3}{4} \lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{3x} = \frac{3}{4} \times 1 = \frac{3}{4}$$

مثال 2

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 4x}{x \tan 2x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\sin^2 4x}{x^2}}{\frac{x \tan 2x}{x^2}}$$

$$= \frac{\lim_{x \to 0} \frac{\sin 4x}{x} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\sin 4x}{x}}{\lim_{x \to 0} \frac{\tan 2x}{x}} = \frac{4\lim_{x \to 0} \frac{\sin 4x}{4x} \, 4\lim_{x \to 0} \frac{\sin 4x}{4x}}{2 \lim_{x \to 0} \frac{\tan 2x}{2x}}$$

$$= \frac{4 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 1}{2 \cdot 1} = \frac{16}{2} = 8$$

مثال 3 جد :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan 4x + \tan 3x}{\sin 5x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\tan 4x}{x} + \frac{\tan 3x}{x}}{\frac{\sin 5x}{x}} = \frac{4\lim_{x \to 0} \frac{\tan 4x}{4x} + 3 \lim_{x \to 0} \frac{\tan 3x}{3x}}{5 \lim_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{5x}}$$

$$= \frac{4 \cdot 1 + 3 \cdot 1}{5 \cdot 1} = \frac{7}{5}$$

مثال ٩ جد

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{\cos 2x}}{x^2}$$

ضرب البسط والمقام بمرافق البسط

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{\cos 2x}}{x^2} \cdot \frac{1+\sqrt{\cos 2x}}{1+\sqrt{\cos 2x}}$$

متطابقة

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{x^2(1+\sqrt{\cos 2x})} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2 x}{x^2(1+\sqrt{\cos 2x})}$$

$$= 2 \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+\sqrt{\cos 2x}}$$

$$= 2 \times 1 \times \frac{1}{1+1} = 2 \times \frac{1}{2} = 1$$

تمارين (1-6)

① جد الغاية لكل مما يأتي :

ⓐ $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-x-6}{(x-3)}$ (حلل البسط بالتجربة)

$$= \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x+2)}{(x-3)} = \lim_{x\to 3} (x+2) = 3+2 = 5$$

ⓑ $\lim_{x\to 1} (3x-4) = 3(1)-4 = -1$ (تعويض مباشر)

ⓒ $\lim_{x\to 1} \frac{(x^3-1)}{(2x-2)}$ (حلل البسط والمقام)

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{2(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2+x+1}{2} = \frac{(1)^2+1+1}{2} = \frac{3}{2}$$

ⓓ $\lim_{x\to 4} \frac{x^2-16}{\sqrt{x+5}-3}$, $\{x : x \geq -5\} / \{4\}$

حلل البسط واضرب البسط والمقام في مرافق المقام

$$= \lim_{x\to 4} \frac{(x-4)(x+4)}{\sqrt{x+5}-3} \cdot \frac{\sqrt{x+5}+3}{\sqrt{x+5}+3}$$

$$= \lim_{x\to 4} \frac{(x-4)(x+4)(\sqrt{x+5}+3)}{x+5-9}$$

$$= \lim_{x\to 4} \frac{(x-4)(x+4)(\sqrt{x+5}+3)}{(x-4)} = \lim_{x\to 4} \frac{(x+4)(\sqrt{x+5}+3)}{1}$$

$$= (4+4)(\sqrt{4+5}+3) = 8 \times 6 = 48$$

ج $\lim_{x \to 3} \frac{x^2-2x-3}{x^2-9}$ حلل البسط والمقام

$$= \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(x+1)}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x \to 3} \frac{(x+1)}{(x+3)} = \frac{3+1}{3+3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

2 اذا كان $f: R \to R$ جد $\lim_{x \to 1} f(x)$ حيث $f(x) = |x-1|$

الحل/

$$f(x) = \begin{cases} (x-1) & x-1 \geq 0 \\ -(x-1) & x-1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x-1 & x \geq 1 \\ 1-x & x < 1 \end{cases}$$

$$\therefore \lim_{x \to 3} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \to 1^+} (x-1) = 1-1 = 0 & L_1 \text{ الغاية من اليمين} \\ \lim_{x \to 1^-} (1-x) = 1-1 = 0 & L_2 \text{ الغاية من اليسار} \end{cases}$$

$L_1 = L_2$ ∴ الغاية موجودة لأن

$$\therefore \lim_{x \to 1} f(x) = 0$$

3 اذا كان $f: R \to R$

$$f(x) = \begin{cases} 5-x^2 & \text{اذا كان } x > -1 \\ x^2+3 & \text{اذا كان } x < -1 \\ 4 & \text{اذا كان } x = -1 \end{cases}$$

أ ارسم المخطط البياني لهذه الدالة ب هل للدالة غاية عند (-1) بين ذلك ؟ ج جد $\lim_{x \to \sqrt{2}} f(x)$

الحل/ أ

x	f(x)
(-2	7)
(-1	4)
(0	5)
(1	4)
(2	1)

(-2,7) (0,5) (-1,4) (1,4) (2,1)

ب

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \to -1} (5-x^2) = 5-(-1)^2 = 4 & L_1 \text{ الغاية من اليمين} \\ \lim_{x \to -1} (x^2+3) = (-1)^2+3 = 4 & L_2 \text{ الغاية من اليسار} \end{cases}$$

$\lim_{x \to -1} f(x) = 4 \Leftarrow L_1 = L_2$ ∴ الغاية موجودة لأن

③ $\lim_{x \to \sqrt{2}} f(x) = \lim_{x \to \sqrt{2}} (5 - x^2) = 5 - (\sqrt{2})^2 = 3$

---

④
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + a & x > -1 \text{ اذا كانت} \\ 6 & x = -1 \text{ اذا كانت} \\ 4x + b & x < -1 \text{ اذا كانت} \end{cases}$$

اذا كان $\lim_{x \to -1} f(x) = 3$ جد قيمة $a, b \in R$

الحل/ بما ان الغاية موجودة عند $x = -1$ فان :

الغاية من اليمين = الغاية من اليسار = 3

$$\therefore \lim_{x \to -1^+} (x^2 + a) \Rightarrow (-1)^2 + a = 3 \Rightarrow a = 2$$

$$\lim_{x \to -1^-} (4x + b) \Rightarrow 4(-1) + b = 3 \Rightarrow -4 + b = 3 \Rightarrow b = 7$$

---

⑤ اذا كانت $f(x) = x^2 + 6$ ، $g(x) = 3x^2 + 2x - 3$

جد $\lim_{x \to 0} (g/f)(x)$ ، $\lim_{x \to 0} (g \cdot f)(x)$

الحل/

$$\lim_{x \to 0} (g/f)(x) = \frac{\lim_{x \to 0} g(x)}{\lim_{x \to 0} f(x)} = \frac{\lim_{x \to 0} (3x^2 + 2x - 3)}{\lim_{x \to 0} (x^2 + 6)} = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to 0} (g \cdot f)(x) = \lim_{x \to 0} g(x) \cdot \lim_{x \to 0} f(x)$$

$$= \lim_{x \to 0} (3x^2 + 2x - 3) \cdot \lim_{x \to 0} (x^2 + 6)$$

$$= (-3)(6) = -18$$

---

⑥ جد الغاية لكل مما يأتي :

ⓐ $$\lim_{x \to 3} \frac{\sin(x - 3)}{x^2 - 9} = \lim_{x \to 3} \frac{\sin(x - 3)}{(x - 3)(x + 3)}$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{\sin(x - 3)}{x - 3} \cdot \frac{1}{(x + 3)} = \lim_{x \to 3} \frac{\sin(x - 3)}{(x - 3)} \cdot \lim_{x \to 3} \frac{1}{x + 3}$$

$$= 1 \cdot \frac{1}{3 + 3} = \frac{1}{6}$$

(b)
$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x^2}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\tan x^2}{x^2}}{\frac{\sin^2 x}{x^2}}$$
$$=\frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x^2}{x^2}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}}=\frac{1}{1}=1$$

(c)
$$\lim_{x\to 0}\left[\sin 2x+\frac{\tan 4x}{6x}\right]$$
$$=\lim_{x\to 0}\sin 2x+\frac{1}{6}\lim\frac{\tan 4x}{x}$$
$$=\sin 0+\frac{4}{6}\lim\frac{\tan 4x}{4x}=0+\frac{4}{6}\times 1=\frac{2}{3}$$

(d)
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{1+\cos x}{1+\cos x}$$ الضرب بمرافق البسط
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x}$$
$$=1\times\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

(e)
$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{3x}{\sin 2x}+\frac{1-\cos 6x}{\sin^2 x}\right]$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{\sin 2x}+\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 6x}{\sin^2 x}$$ (علاقة)
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{3x}{2x}}{\frac{\sin 2x}{2x}}+\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 3x}{\sin^2 x}$$
$$=\frac{\frac{3}{2}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}}+2\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin^2 3x}{x^2}}{\frac{\sin^2 x}{x^2}}=\frac{\frac{3}{2}}{1}+2\,\frac{3\lim\frac{\sin 3x}{3x}\cdot 3\lim\frac{\sin 3x}{3x}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}}$$
$$=\frac{3}{2}+2\times\frac{3\cdot 1\cdot 3\cdot 1}{1}=\frac{3}{2}+18=\frac{39}{2}$$

الاستمرارية Continuity

تكون الدالة مستمرة عند $x = b$ اذا تحققت الشروط التالية:

① $f(b)$ معرّفة أي نجد $f(b)$ بالتعويض المباشر (صورة b)

② $\lim_{x \to b} f(x)$ الغاية موجودة

③ $\lim_{x \to b} f(x) = f(b)$ الغاية = الصورة

تعريف// يقال للدالة f انها مستمرة اذا كانت مستمرة في جميع عناصر مجالها

مثال اذا كانت $f(x) = 8 - x^3 - 2x^2$ أثبت ان الدالة مستمرة

الحل/

① $f(b) = 8 - b^3 - 2b^2 \quad b \in R$

② $\lim_{x \to b} f(x) = \lim_{x \to b} (8 - x^3 - 2x^2) = 8 - b^3 - 2b^2$

∴ الغاية موجودة

$\therefore \lim_{x \to b} f(x) = f(b) = 8 - b^3 - 2b^2$

∴ الدالة مستمرة عند $x = b$ حيث $b \in R$

∴ $f(x)$ مستمرة $\forall x \in R$

تعريف//

① يقال للدالة f مستمرة عن يسار (b) اذا كانت معرفة عن يسار (b) واذا تحققت الشرط $\lim_{x \to b^-} f(x) = b$

② يقال للدالة f مستمرة عن يمين (b) اذا كانت معرفة عن يمين (b) واذا تحققت الشرط $\lim_{x \to b^+} f(x) = b$

③ يقال للدالة f مستمرة على الفترة المغلقة $[a, b]$ اذا تحققت مايلي:

أ) الدالة مستمرة على الفترة (a, b)

ب) الدالة مستمرة على يمين a وعن يسار b

مثال $f: R \longrightarrow R$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & x \geq 2 \\ 8 - x & x < 2 \end{cases}$$

اثبت ان الدالة مستمرة على R .

الحل/ ① نثبت ان الدالة مستمرة عند $x=2$

$f(2)=(2)^2+2=6$ الصورة

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to 2^+}(x^2+2) = 4+2=6 & L_1 \\ \lim_{x\to 2^-}(8-x) = 8-2=6 & L_2 \end{cases}$$

$\therefore$ الغاية موجودة لأن $L_1=L_2$

$\therefore \lim_{x\to 2} f(x)=6$

$\therefore \lim_{x\to 2} f(x) = f(2)=6$

$\therefore$ الدالة مستمرة عند $x=2$

② $\forall a>2$

$f(a)=a^2+2$

$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a}(x^2+2) = a^2+2$

$\therefore \lim_{x\to a} f(x) = f(a) = a^2+2$

$\therefore$ الدالة مستمرة عند $x=a$

$\therefore$ الدالة مستمرة $\forall x>2$

③ $\forall a<2$

$f(a)=8-a$

$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a}(8-x) = 8-a$

$\therefore \lim_{x\to a} f(x) = f(a)=8-a$

$\therefore$ الدالة مستمرة عند $x=a$

$\therefore$ الدالة مستمرة $\forall x<2$

$\therefore$ الدالة مستمرة في R.

تمارين (2 - 6)

①

$f: R \longrightarrow R$

$$f(x) = \begin{cases} 6 - x^2 & x \geq 1 \\ 4x + 1 & x < 1 \end{cases}$$

ابحث استمرارية الدالة عند $x = 1$ ، $x = -1$

الحل/ عند $x = 1$ الصورة $f(1) = 6 - (1)^2 = 5$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \to 1^+} (6 - x) = 6 - 1 = 5 & L_1 \\ \lim_{x \to 1^-} (4x + 1) = 4(1) + 1 = 5 & L_2 \end{cases}$$

$\therefore$ الغاية موجودة لأن $L_1 = L_2$

$\therefore \lim_{x \to 1} f(x) = 5$

ملاحظة: (شروط الاستمرارية متوفرة) $\therefore$ الدالة مستمرة

$\therefore \lim_{x \to 1} f(x) = f(1) = 5$

$\therefore$ الدالة مستمرة عند $x = 1$

عند $x = -1$ نجد الصورة $f(-1) = 4(-1) + 1 = -3$

لأن $x = -1$ تقع ضمن المجال $x < 1$

$\therefore \lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} (4x + 1) = 4(-1) + 1 = -3$

$\therefore$ الغاية موجودة

$\therefore$ الدالة مستمرة لأن $\lim_{x \to -1} f(x) = f(-1) = -3$

---

②

$f: R \longrightarrow R$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} & x \neq 2 \\ 3 & x = 2 \end{cases}$$

ابحث استمرارية الدالة عند $x = 2$

الحل/ الصورة $f(2) = 3$

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)} = \lim_{x \to 2} (x+2) = 2 + 2 = 4$$

$\therefore$ الدالة غير مستمرة عند $x = 2$ $\quad \therefore \lim_{x \to 2} f(x) \neq f(2)$

③ اذا كانت $f(x) = |2x-6|$ $f: R \to R$

ابحث استمرارية الدالة على R.

الحل/

$$f(x) = \begin{cases} 2x-6 & 2x-6 \geq 0 \\ -(2x-6) & 2x-6 < 0 \end{cases}$$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} 2x-6 & x \geq 3 \\ 6-2x & x < 3 \end{cases}$$

نبحث استمرارية الدالة عند $x=3$

$\therefore f(3) = 2(3) - 6 = 0$ الصورة

$$\lim f(x) = \begin{cases} \lim_{x \to 3^+} (2x-6) = 2(3)-6 = 0 & L_1 \\ \lim_{x \to 3^-} (6-2x) = 6-2(3) = 0 & L_2 \end{cases}$$

$\therefore$ الغاية موجودة لان $L_1 = L_2$

$\therefore \lim_{x \to 3} f(x) = 0$

$\therefore$ الدالة متصلة لان:

$\lim_{x \to 3} f(x) = f(3) = 0$

نبحث استمرارية الدالة $\forall x < 3$ ولتكن $x=a$

$f(a) = 6 - 2a$ الصورة

$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} (6-2x) = 6 - 2a$ الغاية موجودة

$\therefore \lim_{x \to a} f(x) = f(a) = 6 - 2a$ $\therefore$ الدالة مستمرة

نبحث استمرارية الدالة $\forall x > 3$ ولتكن $x=a$

$f(a) = 2a - 6$ الصورة

$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} (2x-6) = 2a - 6$ الغاية موجودة

$\therefore \lim_{x \to a} f(x) = f(a) = 2a - 6$ الدالة مستمرة

$\therefore$ الدالة مستمرة في R.

④ لتكن

$$f(x) = \begin{cases} 5 - x^2 & x < \sqrt{2} \\ x^2 + 1 & x > \sqrt{2} \\ 4 & x = \sqrt{2} \end{cases}$$

ابحث استمرارية الدالة عند $x = -1$ ، $x = \sqrt{2}$

الحل/ عند $x = \sqrt{2}$ الصورة $f(\sqrt{2}) = 4$

الغاية من اليمين L_1 $\lim_{x \to \sqrt{2}^+} f(x) = \lim_{x \to \sqrt{2}} (x^2 + 1) = (\sqrt{2})^2 + 1 = 3$

الغاية من اليسار L_2 $\lim_{x \to \sqrt{2}^-} f(x) = \lim_{x \to \sqrt{2}} (5 - x^2) = 5 - (\sqrt{2})^2 = 5 - 2 = 3$

∴ الغاية من اليمين = الغاية من اليسار أي $L_1 = L_2$

$$\lim_{x \to \sqrt{2}} f(x) = 3$$

∴ الدالة غير مستمرة لان $\lim_{x \to \sqrt{2}} f(x) \neq f(\sqrt{2})$

عندما $x = -1$ تقع ضمن الفترة $x < \sqrt{2}$

الصورة $f(-1) = 5 - (-1)^2 = 4$

الغاية موجودة $\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} (5 - x^2) = (5 - (-1)^2) = 4$

$$\therefore \lim_{x \to -1} f(x) = f(-1) = 4$$

∴ الدالة مستمرة عند $x = -1$

---

⑤ لتكن $f(x) = \frac{x}{x^2 - 9}$ ابحث استمرارية الدالة عند $x = 3$ ، $x = -3$ ، $x = 1$

الحل/ عند $x = 1$ $f(1) = \frac{1}{(1)^2 - 9} = \frac{-1}{8}$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x}{x^2 - 9} = \frac{1}{1 - 9} = -\frac{1}{8}$$

∴ الدالة مستمرة $\therefore \lim_{x \to 1} f(x) = f(1) = -\frac{1}{8}$

عند $x = \mp 3$

الصورة غير معرفة $f(\mp 3) = \frac{\mp 3}{(\mp 3)^2 - 9} = \frac{\mp 3}{0} \notin R$

∴ الدالة غير مستمرة عند $x = 3$ ، $x = -3$.

⑥
$$f(x)=\begin{cases} 2a+x^2 & x\geq 1 \\ 2x+b & x<1 \end{cases}$$

اذا كانت الدالة مستمرة عند $x=1$ ، $f(-1)=5$ جد قيمة $a,b\in R$

الحل/ بما ان الدالة مستمرة عند $x=1$ فان :

الغاية من اليمين = الغاية من اليسار

$$\lim_{x\to 1^+}(2a+x^2)=\lim_{x\to 1^-}(2x+b)$$

$$2a+1=2+b \quad ----①$$

وبما ان $f(-1)=5$ فان .

$$\lim_{x\to -1}(2x+b)=5 \Rightarrow -2+b=5$$

$$\therefore b=\boxed{7}$$

نعوض قيمة b في العلاقة ①

$$2a+1=2+7\Rightarrow 2a=9-1\Rightarrow a=\boxed{4}$$

الاسئلة الاثرائية محلولة :

① جد غاية كل من الدوال الاتية (ان وجدت)

ⓐ $f(x)=x^2+3x+5 \quad x\to 1$

الحل/ $\lim_{x\to 1}(x^2+3x+5)=(1)^2+3(1)+5=9$

ⓑ $$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x-1}}\cdot\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(\sqrt{x-1})(\sqrt{x}+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}+1}$$

$$=\frac{\sqrt{1-1}}{\sqrt{1}+1}=\frac{0}{2}=0$$

ⓒ $$\lim_{x\to 2}\frac{x^4-16}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x^2-4)(x^2+4)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)(x^2+4)}{(x-2)}$$

$$=\lim_{x\to 2}(x+2)(x^2+4)=(2+2)(4+4)=4\times 8=32$$

ⓓ $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+x}-2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+x}-2}{x}\cdot\frac{\sqrt{4+x}+2}{\sqrt{4+x}+2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{4+x-4}{x(\sqrt{4+x}+2)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x(\sqrt{4+x}+2)}=\frac{1}{\sqrt{4+0}+2}=\frac{1}{4}$$

② ليكن $f(x) = \frac{1}{x-2}$ جد $\lim_{x \to 2} f(x)$

الحل/ غير معرفة $\lim_{x \to 2} \left(\frac{1}{x-2}\right) = \frac{1}{2-2} = \frac{1}{0} \notin R$

لا توجد غاية .

C) جد غاية كل من

ⓐ $\lim_{x \to 0} \frac{\cot 4x}{\cot 3x}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{\tan 4x}}{\frac{1}{\tan 3x}} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\tan 4x} \cdot \frac{\tan 3x}{1}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\tan 3x}{\tan 4x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\tan 3x}{x}}{\frac{\tan 4}{x}} = \frac{3 \lim_{x \to 0} \frac{\tan 3x}{3x}}{4 \lim_{x \to 0} \frac{\tan 4x}{4x}}$$

$$= \frac{3 \times 1}{4 \times 1} = \frac{3}{4}$$

ⓑ $\lim_{x \to 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos^2 3x} = \lim_{x \to 0} \frac{x \sin x}{\sin^2 3x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x \sin x}{x^2}}{\frac{\sin^2 3x}{x^2}}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\sin x}{x}}{\frac{\sin 3x}{x} \cdot \frac{\sin 3x}{x}} = \frac{\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}}{3 \lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{3x} \cdot 3 \lim \frac{\sin 3x}{3x}}$$

$$= \frac{1}{3 \times 1 \times 3 \times 1} = \frac{1}{9}$$

ⓒ $\lim_{x \to 0} \frac{\tan 3x + \sin 2x}{x + x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\tan 3x}{x} + \frac{\sin 2x}{x}}{1 + x}$ (نقسم البسط والمقام على x)

$$= \frac{3 \lim \frac{\tan 3x}{3x} + 2 \lim \frac{\sin 2x}{2x}}{1 + 0} = \frac{3 \times 1 + 2 \times 1}{1} = 5$$

الفصل السابع
chapter 7

المشتقات : The Derivative

المصطلح	الرمز أو العلاقة الرياضية
مشتقة الدالة $f(x)$	$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$
السرعة	$V(t) = \frac{ds}{dt}$
التعجيل	$g(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}$
قاعدة السلسلة	$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dn} \cdot \frac{dn}{dx}$ $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dn} \div \frac{dx}{dn}$
تركيب الدالتين $f(x)$, $g(x)$	$(f \circ g)(x) = f(g(x))$

المشتقات The Derivative

التفسير الهندسي للمشتقة:

لتكن $a(x_1, y_1)$ ، $b(x_2, y_2)$ من نقط منحني الدالة $f(x)$ وليكن $\overleftrightarrow{ab}$ قاطعاً لمنحني الدالة في a ، b حيث $\overleftrightarrow{ab}$ يصنع زاوية قياسها θ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات حيث:

$$\text{ميل } \overleftrightarrow{ab} = \tan\theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = M \text{ الميل}$$

في المثلث abn القائم في n　$cd = an$

$$\Delta x = x_2 - x_1 = an$$

$$\Delta y = y_2 - y_1 = bn$$

$$y_2 = f(x_2) , \quad y_1 = f(x_1) \qquad m\angle ban = m\angle bmc$$

$$\Delta x = x_2 - x_1 \Rightarrow x_2 = x_1 + \Delta x$$

$$\therefore f(x_2) = f(x_1 + \Delta x)$$

$$\therefore \tan\theta = \text{ميل } \overleftrightarrow{ab} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

واذا اقتربت النقطة (b) من النقطة (a) لوجدنا Δx تتقارب من الصفر فيقال لمثل هذه الحالة بأن الغاية للدالة $\frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$ عندما $\Delta x \to 0$ او بتعبير رياضي $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ وهي تمثل مشتقة الدالة $f(x)$ عند النقطة (x_1, y_1) وهي تساوي: (ميل المماس عند نقطة التماس) ويعبر لها بالشكل:

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx}$$

ملاحظة: التماس في المنحنيات يختلف عن مفهوم التماس في الدوائر.

$$\therefore f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (\text{المشتقة})$$

مثال اذا كانت $f(x) = x^2 + 5x + 3$ جد $f'(2)$ مستخدماً التعريف.

الحل/

$$f'(2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[(2+\Delta x)^2 + 5(2+\Delta x) + 3] - [2^2 + 5(2) + 3]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4 + 4\Delta x + (\Delta x)^2 + 10 + 5\Delta x + 3 - 4 - 10 - 3}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4\Delta x + (\Delta x)^2 + 5\Delta x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(4 + \Delta x + 5)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (4 + \Delta x + 5) = 4 + 0 + 5 = 9$$

ملاحظة: Δx في المقام لابد اختصارها مع البسط واذا لا يمكن اختصار نحلل مراجعة خطوات الحل.

2) يمكن ايجاد $f'(x)$ اولاً حيث $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ ثم نعوض عن $x = 2$

مثال $f(x) = \sqrt{x+3}$ ، $x \geq -3$ جد $f'(1)$ بأستخدام التعريف

$$f'(1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{1+\Delta x+3} - \sqrt{1+3}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{4+\Delta x} - 2}{\Delta x} \cdot \frac{\sqrt{4+\Delta x} + 2}{\sqrt{4+\Delta x} + 2}$$

نضرب البسط والمقام بمرافق البسط

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4 + \Delta x - 4}{\Delta x(\sqrt{4+\Delta x} + 2)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x(\sqrt{4+\Delta x} + 2)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{4+\Delta x} + 2} = \frac{1}{\sqrt{4} + 2}$$

$$\therefore f'(1) = \frac{1}{4}$$

مثال $f(x) = \frac{1}{x}$ ، $x \neq 0$ جد $f'(x)$ باستخدام التعريف

الحل/

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{1}{x+\Delta x} - \frac{1}{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{x-(x+\Delta x)}{x(x+\Delta x)}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{x-x-\Delta x}{x(x+\Delta x)}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{-\Delta x}{x(x+\Delta x)}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-\Delta x}{x(x+\Delta x)} \cdot \frac{1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-1}{x(x+\Delta x)}$$

$$= \frac{-1}{x(x+0)} = \frac{-1}{x^2}$$

تطبيقات فيزيائية على المشتقة :

$S(t) = p(t)$ = البعد عن موقع الحركة = الازاحة (Displacement)

$V(t)$ = السرعة الآنية (Velocity)

$g(t)$ = التعجيل (Acceleration)

$S(t)$ —التفاضل / المشتقة→ $\frac{ds}{dt}$ —التفاضل / المشتقة→ $\frac{dv}{dt}$

$p(t)$ الازاحة البعد عن موقع الحركة —مشتقتها→ $v(t)$ السرعة السرعة الآنية —مشتقتها→ $g(t)$ التعجيل

مشتقة الازاحة = السرعة

مشتقة السرعة = التعجيل

مثال جسم يتحرك على خط مستقيم وفقاً للقاعدة $S = p(t) = 3t^2 + 5t + 8$ حيث $p(t)$ الازاحة بالامتار والزمن t بالثواني ، جد سرعة الجسم الآنية باستخدام التعريف .

الحل/

$$V(t) = p'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{p(t+\Delta t) - p(t)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{[3(t+\Delta t)^2 + 5(t+\Delta t) + 8] - (3t^2 + 5t + 8)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{3t^2 + 6t\Delta t + 3(\Delta t)^2 + 5t + 5\Delta t + 8 - 3t^2 - 5t - 8}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{6t\Delta t + 3(\Delta t)^2 + 5\Delta t}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta t(6t + 3\Delta t + 5)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} (6t + 3\Delta t + 5)$$

$\therefore V(t) = 6t + 5 \ m/sec$ السرعة الآنية

أو (السرعة في اللحظة)

مثال / لتكن $V(t)$ سرعة جسم بالامتار على الثواني حيث: $V(t) = 3t^2 - 12t + 50$

جد ① سرعة الجسم في نهاية 3 ثواني الاولى من بدء الحركة

② جد السرعة عندما التعجيل = صفر.

الحل /

①

$$V(3) = 3(3)^2 - 12(3) + 50 = 27 - 36 + 50 = 41 \ m/sec$$

سرعة الجسم في نهاية 3 ثواني الاولى.

②

$g(t) = V'(t)$ نجد التعجيل = مشتقة السرعة

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{V(t+\Delta t) - V(t)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{[3(t+\Delta t)^2 - 12(t+\Delta t) + 50] - (3t^2 - 12t + 50)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{3t^2 + 6t\Delta t + 3\Delta t^2 - 12t - 12\Delta t + 50 - 3t^2 + 12t - 50}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{6t\Delta t + 3\Delta t^2 - 12\Delta t}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta t(6t + 3\Delta t - 12)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} (6t + 3\Delta t - 12)$$

$\therefore g(t) = 6t - 12 \Rightarrow 6t - 12 = 0$ عندما التعجيل = صفر

$\therefore t = 2 \ sec$ $\therefore V(2) = 3(2)^2 - 12(2) + 50 = 38 \ m/sec$

السرعة عندما التعجيل = صفر

ملاحظة: نقول للدالة أنها قابلة للاشتقاق عند $x=x_1$ اذا وجد $f'(x_1)$
ويمكن القول انه اذا وجد مماس لمنحني الدالة عند $x=x_1$ (وحيد)
تكون الدالة قابلة للاشتقاق عند $x=x_1$

ونقول الدالة قابلة للاشتقاق اذا كانت قابلة للاشتقاق في جميع مجالها
تعريف// قابلية الاشتقاق عند $x_1 \in (a,b)$ اذا تحقق الشرطان :

1. الدالة مستمرة في $[a,b]$
2. موجودة $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}$

مثال لتكن $f: R \to R$ حيث
$$f(x)=\begin{cases} x^2+3 & x\le 1 \\ 2x+2 & x>1 \end{cases}$$

ارسم المخطط البياني للدالة f ثم اثبت انها مستمرة عند $x=1$ وهل الدالة قابلة للاشتقاق؟ بين ذلك.

الحل/

$x<1$, $y=f(x)=x^2+3$

x	y
1	4
0	3
-1	4

$x\ge 1$, $y=2x+2$

x	y
1	4
2	6

(2,6)
(-1,4)
(1,4)
y
x
-1 0 1 2

المخطط البياني للدالة

نبرهن f مستمرة عند $x=1$ فان $f(1)=(1)^2+3=4$

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\begin{cases} \lim_{x\to 1^-}(x^2+3)=4 & L_1 \\ \lim_{x\to 1^+}(2x+2)=4 & L_2 \end{cases}$$

$\therefore$ الغاية موجودة لان $L_1=L_2$

$\therefore \lim_{x\to 1} f(x)=4 \Rightarrow$ الدالة مستمرة لان

$$\lim_{x\to 1} f(x)=f(1)=4$$

هل الدالة قابلة للاشتقاق ؟ نبرهن ذلك :

الاشتقاق من جهة اليمين

$$f'(1) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2(1+\Delta x) + 2 - (4)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2 + 2\Delta x - 2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\Delta x}{\Delta x} = 2 \qquad L_1$$

المشتقة من اليمين

الاشتقاق من جهة اليسار

$$f'(1) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(1+\Delta x)^2 + 3 - 4}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1 + 2\Delta x + \Delta x^2 - 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(2 + \Delta x)}{\Delta x} = 2 \qquad L_2$$

المشتقة من اليسار

$$\therefore L_1 = L_2$$

∴ الدالة قابلة للاشتقاق عند $x=1$

نبحث قابلية الاشتقاق على R

عندما $x<1$ ، $\forall a<1$ نأخذ

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{(a+\Delta x)^2 + 3 - (a^2+3)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^2 + 2a\Delta x + \Delta x^2 + 3 - a^2 - 3}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2a\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(2a + \Delta x)}{\Delta x} = 2a$$

∴ f قابلة للاشتقاق عند $x=a$ ∴ f قابلة للاشتقاق $\forall x<1$

عندما $x>1$ ، $\forall a>1$ نأخذ:

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{2(a+\Delta x) + 2 - (2a+2)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{2a + 2\Delta x + 2 - 2a - 2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\Delta x}{\Delta x} = 2 \qquad \therefore f'(a) = 2$$

∴ الدالة قابلة للاشتقاق عند $x=a$ ⇐ الدالة قابلة للاشتقاق $\forall x>1$

∴ f قابلة للاشتقاق على R.

مثال

$f: R \longrightarrow R$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & x \geq 2 \\ 4x - 1 & x < 2 \end{cases}$$

① هل الدالة قابلة للاشتقاق عند $x = 2$

② هل الدالة مستمرة عند $x = 2$

الحل/

① $f'(2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x}$

ⓐ $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{(2+\Delta x)^2 + 3 - (4+3)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4 + 4\Delta x + (\Delta x)^2 + 3 - 7}{\Delta x}$

$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(4+\Delta x)}{\Delta x} = 4 = L_1$

ⓑ $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{4(2+\Delta x) - 1 - 7}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{8 + 4\Delta x - 8}{\Delta x}$

$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4\Delta x}{\Delta x} = 4 = L_2$

$\therefore L_1 = L_2$

∴ الدالة قابلة للاشتقاق عند $x = 2$ (اذا كانت الدالة قابلة للاشتقاق عند نقطة فانها مستمرة في تلك النقطة)

∴ الدالة مستمرة عند $x = 2$ لكن العكس غير صحيح كما في المثال:

مثال

$f(x) = |x - 3|$ ، $f: R \longrightarrow R$

① برهن على ان الدالة مستمرة عند $x = 3$

② هل الدالة قابلة للاشتقاق عند $x = 3$

الحل/

①

$$f(x) = \begin{cases} x - 3 & x \geq 3 \\ 3 - x & x < 3 \end{cases}$$

$f(3) = 3 - 3 = 0$ الصورة

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \to 3^+} (x - 3) = 3 - 3 = 0 & L_1 \\ \lim_{x \to 3^-} (3 - x) = 3 - 3 = 0 & L_2 \end{cases}$$

∴ الغاية موجودة لان $L_1 = L_2$

∴ الدالة مستمرة عند $x = 3$ ∴ $\lim_{x \to 3} f(x) = f(3) = 0$

(2) نبحث قابلية الاشتقاق عند $x=3$

$$f'(3)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(3+\Delta x)-f(3)}{\Delta x}$$

(a) $\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{(3+\Delta x)-3-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1=L_1$

(b) $\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{3-(3+\Delta x)-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-\Delta x}{\Delta x}=-1=L_2$

$\therefore L_1\neq L_2$

اي المشتقة من اليمين $\neq$ المشتقة من اليسار

$\therefore$ الدالة غير قابلة للاشتقاق عند $x=3$

نستنتج من المثالين السابقين ان : مبرهنة :

اذا كانت الدالة قابلة للاشتقاق عند $x=a$ فان الدالة مستمرة عند $x=a$ والعكس ليس صحيحاً .

الرموز التي تستخدم في المشتقة :

$$y=f(x)\Rightarrow y'=f'(x)=\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(f(x))$$ المشتقة الاولى

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=$$ ميل المماس لمنحني الدالة عند اي نقطة (x,y) من نقاطه .

قواعد المشتقة : اذا كانت الدالة $f(x)$ قابلة للاشتقاق يمكن تطبيق القواعد التالية لايجاد مشتقة الدالة $f(x)$

① لتكن $f(x) = c$ دالة ثابتة فان مشتقتها = صفر
اي $f'(x) = 0$ حيث c عدد ثابت
كذلك $\frac{dy}{dx} = 0$

امثلة : جد مشتقة كل من الدوال التالية :

ⓐ $f(x) = 3 \Rightarrow f'(x) = 0$

ⓑ $f(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow f'(x) = 0$

ⓒ $f(x) = -\sqrt{3} \Rightarrow f'(x) = 0$

---

② لتكن $f(x) = x^n$
حيث $n \in R$, $x \in R / \{0\}$
فان $f'(x) = n\, x^{n-1}$

امثلة : جد $f'(x)$ اذا علمت ان :

ⓐ $f(x) = x^4 \Rightarrow f'(x) = 4x^3$

ⓑ $f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f(x) = x^{\frac{1}{2}}$

$\therefore f'(x) = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

ⓒ $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = x^{-\frac{2}{3}}$

$\therefore f'(x) = -\frac{2}{3} x^{-\frac{5}{3}} = - \frac{-2}{3\sqrt[3]{x^5}}$

---

③ اذا كانت كل من f ، g ، h دوال قابلة للاشتقاق عند x وكذلك $c \in R$

$f(x) = c\, g(x) \Rightarrow f'(x) = c \cdot g'(x)$

مشتقة حاصل ضرب ثابت x دالة قابلة للاشتقاق = الثابت x مشتقة الدالة

---

④ $f(x) = g(x) \pm h(x) \Rightarrow f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$

مشتقة مجموع عدد منته من الدوال = مجموع مشتقاتها .

مثال جد $f'(x)$ اذا علمت أن $f(x)=3x^4$

$$f'(x)=3(4x^3)=12x^3$$

مثال جد المشتقة للآتي:

ⓐ $g(x)=\frac{3}{2x^2}+\frac{5x^2}{3}-\frac{7x}{5}-\frac{1}{6}$

$$g(x)=\frac{3}{2}x^{-2}+\frac{5}{3}x^2-\frac{7}{5}x-\frac{1}{6}$$

$$g'(x)=\frac{3}{2}(-2)x^{-3}+\frac{5}{3}(2x)-\frac{7}{5}-0$$

$$=\frac{-3}{x^3}+\frac{10x}{3}-\frac{7}{5}$$

ⓑ $h(x)=10\left(\frac{x^2}{50}+\frac{x}{9}-\frac{1}{3}\right)$

$$h'(x)=10\left(\frac{2x}{50}+\frac{1}{9}\right)=\frac{2x}{5}+\frac{10}{9}$$

---

⑤ $f(x)=g(x)\cdot h(x)$

$$f'(x)=g(x)\cdot h'(x)+h(x)\cdot g'(x)$$

مشتقة حاصل ضرب دالتين = الدالة الأولى × مشتقة الدالة الثانية + الدالة الثانية × مشتقة الدالة الأولى

مثال

$$f(x)=(3-2x-x^5)(2x^7+5)$$

$$f'(x)=(3-2x-x^5)(14x^6)+(2x^7+5)\cdot(-2-5x^4)$$

---

⑥ $f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}$ $\quad h(x)\neq 0$

$$f'(x)=\frac{g'(x)\cdot h(x)-g(x)\cdot h'(x)}{[h(x)]^2}$$

مشتقة حاصل قسمة دالتين = $\frac{\text{مشتقة البسط × دالة المقام − البسط × مشتقة المقام}}{(\text{المقام})^2}$

مثال جد $f'(x)$ $\quad f(x)=\frac{x^2+3x+1}{x^2+5}$

$$f'(x) = \frac{(x^2+5)(2x+3) - (x^2+3x+1)(2x)}{(x^2+5)^2}$$

ملاحظة : المشتقة الثانية $f''(x) = y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2}(f(x))$

وبنفس الطريقة تعرف المشتقة الثالثة والرابعة . . .

---

⑦ مشتقة دالة الدالة

اذا كان $U^n = g(x)$

فان : $g'(x) = \frac{dg}{dx}$

اي $\frac{d}{dx}(u)^n = n u^{n-1} \frac{du}{dx}$

او بشكل آخر $f(x) = (g(x))^n$

$f'(x) = n(g(x))^{n-1} \cdot g'(x)$

مثال اذا كان $y = (1-x)^3$ جد y', y'' عند $x=2$

$y = (1-x)^3$

$y' = 3(1-x)^2(-1) = -3(1-x)^2$ المشتقة الاولى

$y' = -3(1-2)^2 = -3$ عند $x=2$

$y'' = -6(1-x)(-1)$

$= 6(1-x)$ المشتقة الثانية

$y'' = 6(1-2) = -6$ عند $x=2$

تمارين (1 - 7)

① (أ) $y=3x^2+4x+2$ باستخدام التعريف جد $f'(1)$.

الحل/

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$ التعريف

$$\therefore f'(1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{3(1+\Delta x)^2+4(1+\Delta x)+2-(3(1)^2+4(1)+2)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{3+6\Delta x+3\Delta x^2+4+4\Delta x+2-9}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x(6+3\Delta x+4)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}(6+3\Delta x)+4=10$$

---

② $g(x)=\sqrt{x}$ جد أوسع مجال للدالة ومشتقتها .

الحل/ ملاحظة : اذا لم يذكر لك في السؤال استخدام التعريف فيمكنك الاشتقاق مباشرة حسب قواعد الاشتقاق لكن في هذا السؤال سنستخدم طريقة التعريف .

اوسع مجال للدالة $g(x)=\{x\geq 0\}$ حيث $x\in R$

نجد مشتقة الدالة باستخدام التعريف

$$g'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}\cdot\frac{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x+\Delta x-x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

∴ اوسع مجال للمشتقة $g'(x)=\{x>0\}$

ج) $f(x)=\frac{2x+1}{x-1}$ حيث $x\neq 1$ جد باستخدام التعريف $f'(2)$

الحل/

$$f'(2)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{2(2+\Delta x)+1}{(2+\Delta x)-1}-\frac{2(2)+1}{2-1}}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{5+2\Delta x}{1+\Delta x}-\frac{5}{1}}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{5+2\Delta x-5(1+\Delta x)}{1+\Delta x}}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{5+2\Delta x-5-5\Delta x}{\Delta x(1+\Delta x)}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-3\Delta x}{\Delta x(1+\Delta x)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-3}{1+\Delta x}=-3$$

---

2) ابحث استمرارية وقابلية الاشتقاق لكل من الدوال التالية عند قيم x التي أمامها:

أ)
$$f(x)=\begin{cases}x^2+1 & \text{اذا كان } x\le 2\\ 7-x & \text{اذا كان } x>2\end{cases}$$

عند $x=2$

الحل/ نبحث استمرارية الدالة عند $x=2$

الصورة $f(2)=2^2+1=5$

$$\lim_{x\to 2}f(x)=\begin{cases}\lim_{x\to 2^-}(x^2+1)=4+1=5 & L_1\\ \lim_{x\to 2^+}(7-x)=7-2=5 & L_2\end{cases}$$

$L_1=L_2$ ∴ الغاية موجودة لأن

$$\therefore \lim_{x\to 2}f(x)=5$$

نبحث قابلية الاشتقاق عند $x=2$

$$f'(2)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{7-(2+\Delta x)-5}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-\Delta x}{\Delta x}=-1 \quad L_1$$ الاشتقاق من جهة اليمين

$$f'(2)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{(2+\Delta x)^2+1-5}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{4+4\Delta x+\Delta x^2+1-5}{\Delta x}=4 \quad L_2$$ المشتقة من جهة اليسار

$\therefore L_1\neq L_2$ ∴ الدالة غير قابلة للاشتقاق عند $x=2$

ب)

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{اذا كانت } x \geq -1 \\ -2x-1 & \text{اذا كانت } x < -1 \end{cases}$$

عند $x=-1$

نبحث استمرارية الدالة عند $x=-1$

الصورة $f(-1)=(-1)^2=1$

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to -1^+} x^2 = (-1)^2 = 1 & L_1 \text{ الغاية من اليمين} \\ \lim_{x\to -1^-} (-2x-1) = -2(-1)-1=1 & L_2 \text{ الغاية من اليسار} \end{cases}$$

∴ الغاية موجودة لان $L_1 = L_2$

نبحث قابلية الاشتقاق (استخدم قواعد الاشتقاق)

المشتقة من جهة اليمين $f'(x)=2x \Rightarrow f'(-1)=2(-1)=-2$

المشتقة من جهة اليسار $f'(x)=-2 \Rightarrow f'(-1)=-2$

∴ المشتقة من جهة اليمين = المشتقة من جهة اليسار

$\therefore f'(-1)=-2$

∴ الدالة قابلة للاشتقاق عند $x=-1$

ملاحظة: ويمكن ايجاد الاشتقاق بطريقة استخدام التعريف حسب المثال السابق

---

4) $f: R \longrightarrow R$ ، $f(x)=|2x-6|$

هل الدالة قابلة للاشتقاق عند $x=3$

الحل/

$$f(x)=\begin{cases} 2x-6 & 2x-6 \geq 0 \\ -(2x-6) & 2x-6 < 0 \end{cases}$$

$$\therefore f(x)=\begin{cases} 2x-6 & x \geq 3 \\ 6-2x & x < 3 \end{cases}$$

نبحث قابلية الاشتقاق للدالة من جهة اليمين ومن جهة اليسار باستخدام التعريف عند $x=3$

المشتقة من جهة اليمين $f'(3)=\lim_{\Delta x\to 0^+} \frac{f(3+\Delta x)-f(3)}{\Delta x}$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{2(3+\Delta x)-6-(2(3)-6)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{6+2\Delta x-6-0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{2\Delta x}{\Delta x} = 2 \quad L_1$$

$$f'(3) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{6 - 2(3+\Delta x)}{\Delta x}$$ ، المشتقة من جهة اليسار

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{6 - 6 - 2\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-2\Delta x}{\Delta x} = -2 \quad L_2$$

$$\therefore L_1 \neq L_2$$

اي المشتقة من اليمين $\neq$ المشتقة من اليسار

$\therefore$ الدالة غير قابلة للاشتقاق عند $x=3$

---

(9) جد $a, b \in R$ اذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق عند $x=1$ حيث:

$$f(x) = \begin{cases} x^2+5 & \text{اذا كان } x \geq 1 \\ ax+b & \text{اذا كان } x < 1 \end{cases}$$

الحل/ بما ان الدالة قابلة للاشتقاق عند $x=1$

$\therefore$ المشتقة من جهة اليمين = المشتقة من جهة اليسار

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{(1+\Delta x)^2 + 5 - 6}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1 + 2\Delta x + \Delta x^2 + 5 - 6}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(2+\Delta x)}{\Delta x} = \boxed{2}$$

المشتقة من اليسار ،

$$\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{a(1+\Delta x) + b - (a+b)}{\Delta x} = 2$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{a + a\Delta x + b - a - b}{\Delta x} = 2$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{a\Delta x}{\Delta x} = 2 \Rightarrow a = \boxed{2}$$

وبما ان الدالة قابلة للاشتقاق عند $x=1$ فهي مستمرة عند $x=1$ لذلك:

من اليمين = الغاية من اليسار

$$\lim_{x \to 1} (x^2+5) = \lim_{x \to 1} (ax+b)$$

$$\therefore 1^2 + 5 = 2(1) + b \Rightarrow 6 = 2 + b$$

$$\therefore b = \boxed{4}$$

ملاحظة: يمكن الحل بدون استخدام التعريف للمشتقة.

5) باستخدام قواعد المشتقة جد المشتقة الاولى للدوال الآتية عند العدد المؤشر ازاءها:

① $f(x) = 3x^2 + 5x + 8$ عند $x = 1$

$f'(x) = 3(2x^1) + 5 + 0 = 6x + 5$

$\therefore f'(1) = 6(1) + 5 = 11$

② $f(x) = x\sqrt{x^2+3}$ عند $x = -1$

$f(x) = x \cdot (x^2+3)^{\frac{1}{2}}$ استخدم قاعدة مشتقة حاصل ضرب دالتين

$f'(x) = x \cdot \frac{1}{2}(x^2+3)^{-\frac{1}{2}}(2x) + 1 \cdot (x^2+3)^{\frac{1}{2}}$

$= \frac{x^2}{\sqrt{x^2+3}} + \sqrt{x^2+3}$

$\therefore f'(-1) = \frac{(-1)^2}{\sqrt{(-1)^2+3}} + \sqrt{(-1)^2+3} = \frac{1}{2} + 2 = \frac{\quad}{2}$

③ $f(x) = \left(\frac{x^2+3}{x^2+1}\right)^4$ عند $x = 0$

استخدم القاعدة السابقة

$f'(x) = 4\left(\frac{x^2+3}{x^2+1}\right)^3 \cdot \frac{2x(x^2+1) - (x^2+3) \cdot 2x}{(x^2+1)^2}$

$= 4\left(\frac{x^2+3}{x^2+1}\right)^3 \cdot \frac{2x^3+2x-2x^3-6x}{(x^2+1)^2} = 4\left(\frac{x^2+3}{x^2+1}\right)^3 \cdot \frac{-4x}{(x^2+1)^2}$

$\therefore f'(0) = 4\left(\frac{0+3}{0+1}\right)^3 \frac{-4(0)}{(0+1)^2} = 0$

④ $f(x) = \frac{x^2+1}{(x^2-x)^2}$ عند $x = -1$

استخدم قاعدة مشتقة حاصل قسمة دالتين

$f'(x) = \frac{2x(x^2-x)^2 - 2(x^2-x)(2x-1)(x^2+1)}{(x^2-x)^4}$

$\therefore f'(-1) = \frac{2(-1)((-1)^2-(-1))^2 - 2((-1)^2-(-1))(2(-1)-1)((-1)^2+1)}{((-1)^2-(-1))^4}$

$= \frac{-2(4) - 2(2)(-3)(2)}{16}$

$\therefore f'(-1) = \frac{-8+24}{16} = \frac{16}{16} = 1$

⑥ $y = \sqrt[3]{3x+5}$ جد y' ، y'' عند $x=1$

الحل/

$y = (3x+5)^{\frac{1}{3}}$

$y' = \frac{1}{3}(3x+5)^{-\frac{2}{3}}(3) = \frac{1}{\sqrt[3]{(3x+5)^2}}$

$\therefore y' = \frac{1}{\sqrt[3]{(3+5)^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{8^2}} = \frac{1}{4}$ عند $x=1$

$y'' = \frac{-2}{3}(3x+5)^{-\frac{5}{3}}(3) = -2(3x+5)^{-\frac{5}{3}}$

$\therefore y'' = \frac{-2}{(3x+5)^{\frac{5}{3}}} = \frac{-2}{(3+5)^{\frac{5}{3}}} = \frac{-2}{8^{\frac{5}{3}}} = \frac{-2}{32} = \frac{-1}{16}$ عند $x=1$

قاعدة السلسلة : chain Rule

$y = f(n)$ ، f قابلة للاشتقاق عند n

$n = g(x)$ ، g قابلة للاشتقاق عند x

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dn} \times \frac{dn}{dx}$$

مثال: اذا كانت كل من $n = 4x+3$, $y = 3n^2+5$

جد : $\frac{dy}{dx}$

الحل//

$\frac{dy}{dn} = 6n$, $\frac{dn}{dx} = 4$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dn} \times \frac{dn}{dx} = 6n\ (4) = 24n = 24(4x+3)$

$\therefore \frac{dy}{dx} = 96x + 72$

حل آخر: ان نعوض قيمة n في الدالة $y = 3n^2+5$

$\therefore y = 3(4x+3)^2 + 5 = 3(16x^2+24x+9)+5$

$y = 48x^2 + 72x + 32$

$\therefore \frac{dy}{dx} = 96x + 72$

مثال/ اذا كانت $x = 3n - 4$ ، $y = 2n + 5$ جد $\frac{dy}{dx}$

الحل/

$\frac{dy}{dn} = 2$ ، $\frac{dx}{dn} = 3$

ويمكن استخدام طريقة أخرى:

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dn} \div \frac{dx}{dn} = 2 \div 3$

وذلك بقلب $\frac{dx}{dn}$ لأن $\frac{dn}{dx}$ يساوي $\frac{1}{3}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{2}{3}$

مثال/ اذا كان $y = n^2 + 3n + 2$ ، $n = 2x + 1$ جد $\frac{dy}{dx}$ عندما $n = 2$

الحل/

$\frac{dy}{dn} = 2n + 3$ ، $\frac{dn}{dx} = 2$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dn} \cdot \frac{dn}{dx} = (2n+3) \times 2 = 4n + 6$

وعندما $n = 2$ فإن

$\frac{dy}{dx} = 4(2) + 6 = 14$

وعندما $x = 2$ نعوض بدل n بما يساويها

$\frac{dy}{dx} = 4n + 6 = 4(2x+1) + 6 = 4(2(2)+1) + 6 = 26$

مشتقة حاصل تركيب دالتين قابلتين للاشتقاق $g(x)$ ، $f(x)$

اذا كان $f(x)$ ، $g(x)$ كلاهما قابلة للاشتقاق عند x فإن:

$(f \circ g)(x) = f(g(x))$

$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

مثال/ اذا كانت $f(x) = 2x + 3$ ، $g(x) = x^2 + 3x + 1$ جد $(g \circ f)'(x)$

الحل/ نجد اولاً تركيب الدالتين ثم نشتق الناتج

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x+3) = (2x+3)^2 + 3(2x+3) + 1$

$\therefore (g \circ f)(x) = 4x^2 + 12x + 9 + 6x + 9 + 1$

$(g \circ f)(x) = 4x^2 + 18x + 19$ تركيب الدالتين

$\therefore (g \circ f)'(x) = 8x + 18$

معادلة المماس للمنحني والعمود على المماس :

نجد المشتقة الأولى للدالة المنحني وإذا كانت نقطة التماس (x_1, y_1) معلومة فإن ميل المماس للمنحني الدالة يساوي المشتقة عند نقطة التماس ومعادلة المماس هي :

$$y - y_1 = m\,(x - x_1)$$

أو تكتب بالشكل $m_{\text{المماس}} = \dfrac{y - y_1}{x - x_1}$

وميل العمود = $-\dfrac{1}{\text{ميل المماس}}$ في نفس نقطة التماس ونجد معادلة العمود بنفس الطريقة

أي بتطبيق نفس القاعدة. أما إذا لم تحدد نقطة التماس فيجب أن نعين نقطة التماس ثم الميل ومن تطبيق معادلة المستقيم المذكورة نجد معادلة المماس والعمود عليه.

مثال

جد معادلة المماس للمنحني $f(x) = (3 - x^2)^4$ عند $x = 2$

الحل / نجد نقطة التماس وذلك بتعويض قيمة x في الدالة لنحصل على y

$\therefore y = f(2) = (3 - 2^2)^4 = 1$

$\therefore$ نقطة التماس $(2, 1)$ ثم نجد ميل المماس حيث يساوي مشتقة الدالة عند نقطة التماس

$\therefore f'(x) = 4(3 - x^2)^3 \cdot (-2x)$

$= -8x(3 - x^2)^3$

الميل = مشتقة الدالة $f'(2)$

ميل المماس $\therefore m_{\text{المماس}} = f'(2) = -8(2)(3 - 2^2)^3 = 16$

معادلة المماس هي :

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$\therefore y - 1 = 16(x - 2) \Rightarrow y - 1 = 16x - 32$

$\therefore \boxed{16x - y - 31 = 0}$ معادلة المماس

* أما إذا طلب في السؤال إيجاد معادلة العمود على المماس للمنحني فإن نقطة التماس $(2, 1)$ ، $m_{\text{العمود}} = -\dfrac{1}{\text{ميل المماس}} = -\dfrac{1}{16}$

نفس القانون

$\therefore y - 1 = -\dfrac{1}{16}(x - 2) \Rightarrow 16y - 16 = -x + 2$

$\therefore \boxed{x + 16y - 18 = 0}$ معادلة العمود

مثال جد معادلة المماس لمنحني الدالة $(f\circ g)(x)$ عند $x=2$ اذا علم
$f(x)=\sqrt[3]{3x+5}$ ، $g(x)=x-1$

الحل/ هذه دالة تركيبة من الدالتين $g(x)$ ، $f(x)$ نجد تركيب الدالتين $(f\circ g)(x)$

$$\therefore (f\circ g)(x) = f(g(x)) = f(x-1)$$
$$= \sqrt[3]{3(x-1)+5} = \sqrt[3]{3x+2}$$
$$\therefore (f\circ g)(x) = (3x+2)^{1/3}$$ الدالة

نجد نقطة التماس حيث نعوض $x=2$ في الدالة الجديدة المركبة وهي :
$$y=(f\circ g)(2)=\sqrt[3]{3(2)+2}=\sqrt[3]{8}=2$$

$\therefore$ نقطة التماس $(2,2)$ ثم نجد ميل المماس حيث يساويه $(f\circ g)'(2)$

$\therefore$ نجد مشتقة الدالة $(f\circ g)(x)$:
$$(f\circ g)'(x)=\frac{1}{3}(3x+2)^{-\frac{2}{3}}(3)=\frac{1}{\sqrt[3]{(3x+2)^2}}$$

$$\therefore m_{المماس}=(f\circ g)'(2)=\frac{1}{\sqrt[3]{(3(2)+2)^2}}=\frac{1}{\sqrt[3]{64}}=\frac{1}{4}$$ ميل المماس

$$\therefore y-y_1=m(x-x_1)$$ معادلة المماس
$$\Rightarrow y-2=\frac{1}{4}(x-2) \Rightarrow 4y-8=x-2$$
$$\therefore \boxed{x-4y+6=0}$$ معادلة المماس

التفاضل الضمني /

يقال للدالة بالصورة $y=f(x)$ بالدالة الصريحة

مثل : $y=x^2+3x-5$ ، $f(x)=y=\sqrt[3]{2x+3}$
اي تعطى y بدلالة x . تسمى دالة صريحة .

أما المعادلات التي على الصورة $x^2+y^2=25$
أو $2x+y^2=x^2+1$

تسمى دالة ضمنية وطريقة ايجاد مشتقة الدالة الصريحة كما سبق .
اما اشتقاق الدوال الضمنية فتطبق عليها قواعد الاشتقاق وتشتق y بالنسبة الى x فمثلاً اشتقاق y^2 هو $2y\frac{dy}{dx}$ ذات $\frac{dy}{dx}$ تعني مشتقة y بالنسبة الى x فنشتق الحدود جميعاً ثم نجمع الحدود التي تحتوي على $\frac{dy}{dx}$ في جهة اليسار والحدود الاخرى في الجهة اليمنى ثم نجد $\frac{dy}{dx}$ حيث تمثل مشتقة الدالة الضمنية .

مثال/ اذا كان $x^2 - y^2 = 7y - x$ جد $\frac{dy}{dx}$.

الحل/ ان الدالة ضمنية

$$x^2 - y^2 = 7y - x$$

فالاشتقاق يكون بالشكل

$$2x - 2y\frac{dy}{dx} = 7\frac{dy}{dx} - 1$$

$$-2y\frac{dy}{dx} - 7\frac{dy}{dx} = -1 - 2x$$

$$\frac{dy}{dx}(-2y - 7) = -1 - 2x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-1 - 2x}{-2y - 7} = \frac{-(1 + 2x)}{-(2y + 7)}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1 + 2x}{7 + 2y}$$

مثال/ جد معادلة المماس للدائرة التي معادلتها $x^2 + y^2 = 25$ عند النقطة $(-3, 4)$

الحل/ نقطة التماس معلومة نجد الميل للمماس حيث يساوي المشتقة $\frac{dy}{dx}$ عند نقطة المماس.

$$\therefore x^2 + y^2 = 25 \Rightarrow 2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow$$

$$2y\frac{dy}{dx} = -2x \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2y} = -\frac{x}{y}$$

$$\therefore m_{المماس} = \frac{dy}{dx} = -\frac{-3}{4} = \frac{3}{4}$$ ميل المماس

معادلة المماس:

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 4 = \frac{3}{4}(x + 3) \Rightarrow$$

$$4y - 16 = 3x + 9 \rightarrow 3x - 4y + 25 = 0$$ معادلة المماس

مثال/ اذا كان $x^2 + y^2 = 10$ أثبت أن $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y\frac{d^2y}{dx^2} + 1 = 0$

الحل/ نجد $\frac{dy}{dx}$

$$x^2 + y^2 = 10 \Rightarrow 2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \rightarrow x + y\frac{dy}{dx} = 0$$

ثم نشتق المعادلة مرة ثانية فان:

$$1 + y\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dy}{dx} = 0$$

$$1 + y\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0 \Rightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y\frac{d^2y}{dx^2} + 1 = 0$$

مثال جسم يتحرك على خط مستقيم وفقاً للقاعدة :

$p(t) = \frac{1}{3}t^3 - 2t^2 + 3t + 5$ حيث $p(t)$ الإزاحة بالأمتار ، t الزمن بالثواني

جد السرعة عندما التعجيل = صفر .

الحل/ السرعة في اية لحظة $V(t) = p'(t) = \frac{1}{3} \cdot 3t^2 - 4t + 3$ السرعة

التعجيل في اية لحظة $g(t) = p''(t) = 2t - 4$ التعجيل

$\because p''(t) = g(t) = 0 \Rightarrow 2t - 4 = 0 \Rightarrow t = 2 \text{ sec}$

$\therefore$ في الثانية $t=2$ يكون التعجيل = صفر لذلك السرعة عندما $t=2$

السرعة $V(2) = (2)^2 - 4(2) + 3 = 4 - 8 + 3 = -1 \text{ m/sec}$

مثال لتكن $V(t)$ سم/ثا سرعة جسم يتحرك على خط مستقيم وفق القاعدة : $V(t) = 3t^2 - 6t + 9$ جد :

① السرعة عندما $t=2$ ② السرعة عندما التعجيل = صفر

الحل/ السرعة

① $V(2) = 3(2)^2 - 6(2) + 9 = 9 \text{ cm/sec}$

② عندما التعجيل يساوي صفر $g(t) = V'(t) = 6t - 6 = 0$

$\Rightarrow 6t - 6 = 0 \Rightarrow t = 1$

السرعة عندما التعجيل = صفر . $\therefore V(1) = 3(1)^2 - 6(1) + 9 = 6 \text{ cm/sec}$

تمارين (2 - 7)

① $g(x) = (1+2x^2+5x)^{3/2}$

$f(x) = 2x$

$(g\circ f)'(0)$ جد

الحل/ نجد تركيب الدالتين أولاً ثم نشتقها

$(g\circ f)(x) = g(f(x))$

$= g(2x) = (1+2(2x)^2+5(2x))^{3/2}$

$\therefore (g\circ f)(x) = (1+8x^2+10x)^{3/2}$

$\therefore (g\circ f)'(x) = \frac{3}{2}(1+8x^2+10x)^{1/2}(16x+10)$

$\therefore (g\circ f)'(0) = \frac{3}{2}(1+0+0)^{1/2}(0+10)$

$= \frac{3}{2}\times 10 = 15$

---

② $y = n^3+3n-5$

$n = 2x+1$

$\frac{dy}{dx}$ جد

الحل/

$\frac{dy}{dn} = 3n^2+3 \quad , \quad \frac{dn}{dx} = 2$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dn}\cdot\frac{dn}{dx} = (3n^2+3)\cdot 2 = 6n^2+6$

$\therefore \frac{dy}{dx} = 6(2x+1)^2+6$

---

③ $y = an^2+3n-7$ اذا كانت

$n = 2x+1$

وكان $\frac{dy}{dx} = 30$ عندما $x=1$ ، جد قيمة a

الحل/ $\frac{dy}{dn} = 2an+3 \quad , \quad \frac{dn}{dx} = 2 \quad , \quad n = 2(1)+1 = 3$

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dn}\cdot\frac{dn}{dx} = (2an+3)\cdot 2 = 4an+6$

$\therefore \frac{dy}{dx} = 30 \quad , \quad x=1 \Rightarrow 4an+6 = 30$

$\therefore 4a(3)+6 = 30 \Rightarrow 12a = 24 \Rightarrow a = 2$

④ $y = 3n^2 + 2n + 4$

$x = 8n + 5$

جد $\frac{dy}{dx}$ عندما $n=1$

الحل/

$$\frac{dy}{dn} = 6n + 2$$

$$\frac{dx}{dn} = 8$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dn} \div \frac{dx}{dn} = (6n+2) \div 8$$

عندما $n=1$ فإن

$$\frac{dy}{dx} = (6(1)+2) \div 8 = 1$$

---

⑤ اذا كان $xy^2 + 4x^2 = 7x - 2y$

جد $\frac{dy}{dx}$

الحل/ الدالة ضمنية نستخدم الاشتقاق الضمني :

$$x \cdot 2y\frac{dy}{dx} + 1 \cdot y^2 + 8x = 7 - 2\frac{dy}{dx}$$

$$\therefore 2xy\frac{dy}{dx} + 2\frac{dy}{dx} = 7 - y^2 - 8x$$

$$\frac{dy}{dx}(2xy + 2) = 7 - y^2 - 8x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{7 - y^2 - 8x}{2xy + 2}$$

---

⑥ اذا كان $xy^2 + yx^2 = 2$

اثبت أن $\frac{dy}{dx} = -1$ عند $(1,1)$

الحل/ اشتقاق ضمني

$$x \cdot y^2 + y \cdot x^2 = 2$$

$$x \cdot 2y\frac{dy}{dx} + 1 \cdot y^2 + y \cdot 2x + \frac{dy}{dx}x^2 = 0$$

$$2xy\frac{dy}{dx} + y^2 + 2xy + x^2\frac{dy}{dx} = 0$$

$$2xy\frac{dy}{dx} + x^2\frac{dy}{dx} = -2xy - y^2$$

$$\frac{dy}{dx}(2xy + x^2) = -2xy - y^2$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-2xy - y^2}{(2xy + x^2)} = \frac{-2-1}{2+1} = \frac{-3}{3} = -1$$

---

(7) جسم يتحرك على خط مستقيم وفق القاعدة $p(t) = 24t^2 - t^3$
حيث $p(t)$ الإزاحة بالأمتار ، t الزمن بالثواني .
(1) جد سرعة الجسم بعد 2 ثانية من بدء الحركة .
(2) جد الإزاحة عندما التعجيل = صفر .

الحل/ السرعة الآنية

(1) $V(t) = p'(t) = 48t - 3t^2$

$\therefore V(2) = 48 \times 2 - 3 \times 2^2 = 96 - 12 = 84 \ m/sec$

السرعة بعد 2 ثانية من بدء الحركة

(2) $g(t) = V'(t) = p''(t) = 48 - 6t = 0$

عندما التعجيل صفر فإنه

$\therefore 48 - 6t = 0 \Rightarrow t = 8$

$\therefore p(8) = 24 \times 8^2 - 8^3$

$= 1536 - 512 = 1024 \ m$ الإزاحة

---

(8) لتكن $V(t)$ سم/ثا تمثل سرعة جسم يتحرك على خط مستقيم وأن $V(t) = t^3 - t^2 + 5$ جد السرعة عندما التعجيل = 8 سم/ثا^2 .

الحل/ التعجيل = مشتقة السرعة

$g(t) = V'(t) = 3t^2 - 2t$

التعجيل الآني (في أية لحظة)

عندما التعجيل = 8 سم/ثا^2 فإن:

$3t^2 - 2t = 8 \Rightarrow$

$3t^2 - 2t - 8 = 0 \Rightarrow (3t + 4)(t - 2) = 0$

either $3t + 4 = 0 \Rightarrow t = -\frac{3}{4}$ يهمل

or $t - 2 = 0 \Rightarrow t = 2 \ sec$

$\therefore V(2) = 2^3 - 2^2 + 5 = 8 - 4 + 5 = 9 \ cm/sec$

السرعة عندما التعجيل = 8 سم/ثا^2 .

⑨ جد معادلة المماس لمنحني الدالة : $f(x)=\sqrt{x^2+3}$ عندما $x=-1$

الحل/ نجد نقطة التماس والميل

$f(x)=(x^2+3)^{\frac{1}{2}}$

$y=f(-1)=((-1)^2+3)^{\frac{1}{2}}=(4)^{\frac{1}{2}}=2$

$\therefore$ $(-1,2)$ نقطة التماس والميل = المشتقة عند نقطة التماس

المشتقة $f'(x)=\frac{1}{2}(x^2+3)^{-\frac{1}{2}}\cdot(2x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}$

ميل المماس $\therefore m=f'(-1)=\frac{-1}{\sqrt{(-1)^2+3}}=\frac{-1}{2}$

$y-y_1=m(x-x_1)\Rightarrow[y-2=-\frac{1}{2}(x+1)]\times 2$

$2y-4=-1(x+1)\Rightarrow 2y-4=-x-1$

معادلة المماس $\therefore x+2y-3=0$

---

⑩ $f(x)=x-x^2$ ، $g(x)=\sqrt{2x+1}$

حيث $x\geq\frac{-1}{2}$ جد معادلة المماس للمنحني $(f\circ g)(x)$ عند $x=4$

الحل/ نجد $(f\circ g)(x)$

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(\sqrt{2x+1})=\sqrt{2x+1}-(2x+1)$

$\therefore (f\circ g)(x)=(2x+1)^{\frac{1}{2}}-2x-1$

$(f\circ g)'(x)=\frac{1}{2}(2x+1)^{-\frac{1}{2}}(2)-2$

$=\frac{1}{\sqrt{2x+1}}-2$

$y=(f\circ g)(4)=(2(4)+1)^{\frac{1}{2}}-2(4)-1$

$=3-8-1=-6$

$\therefore (4,-6)$ نقطة التماس

الميل $m=(f\circ g)'(4)=\frac{1}{\sqrt{2(4)+1}}-2=\frac{1}{3}-2=\frac{-5}{3}$

$y-y_1=m(x-x_1)\Rightarrow y+6=\frac{-5}{3}(x-4)$

$3y+18=-5x+20$

معادلة المماس $5x+3y-2=0$

Dervetive of the circlar functions مشتقات الدوال الدائرية

① $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$ يمكن استخدام التعريف لبرهان:

$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ تعريف المشتقة

$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x}$

$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin x \cos \Delta x + \sin \Delta x \cos x - \sin x}{\Delta x}$

$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-\sin x(1-\cos \Delta x) + \sin \Delta x \cos x}{\Delta x}$

$= -\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin x(1-\cos \Delta x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \Delta x \cos x}{\Delta x}$

$= -\sin x \lim \frac{(1-\cos \Delta x)}{\Delta x} + \lim \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \cdot \cos x$

$= -\sin x \cdot (0) + 1 \cdot \cos x$

$= \cos x$

$\therefore \boxed{\frac{d}{dx} \sin x = \cos x}$ مشتقة جيب الزاوية

ملاحظة: $\sin x =$ جا س ، $\cos x =$ جتا س ، $\tan x =$ ظا س

$\csc x =$ قتا س ، $\sec x =$ قا س ، $\cot x =$ ظتا س

② $f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\sin x$ مشتقة جيب تمام الزاوية

$\because f(x) = \cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$

$\therefore f'(x) = \cos(\frac{\pi}{2} - x) \cdot (-1)$

$= -\sin x$

$\therefore \boxed{\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x}$ مشتقة جيب تمام الزاوية

القواعد الأخرى لمشتقات الدوال الدائرية بدون برهان

(11) جد معادلتي المماس للمنحني عند $y=-2$ حيث $x^2+y^2-5xy=15$

الحل/ نجد نقطتي التماس وذلك بتعويض $y=-2$ في المعادلة.

$$x^2+4-5x(-2)=15$$

$$x^2+4+10x-15=0$$

$$x^2+10x-11=0 \Rightarrow (x-1)(x+11)=0$$

either $x-1=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow$ $\therefore$ نقطة التماس الأولى $(1,-2)$

or $x+11=0 \Rightarrow x=-11 \Rightarrow$ $\therefore$ نقطة التماس الثانية $(-11,-2)$

نجد المشتقة الضمنية للدالة

$$x^2+y^2-5xy=15$$

$$2x+2y\frac{dy}{dx}-\left(5x\frac{dy}{dx}+5y\right)=0$$

$$2y\frac{dy}{dx}-5x\frac{dy}{dx}=5y-2x \Rightarrow \frac{dy}{dx}(2y-5x)=5y-2x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{5y-2x}{2y-5x}$$ المشتقة الأولى

الميل $m_{(1,-2)}=\frac{dy}{dx}=\frac{5(-2)-2(1)}{2(-2)-5(1)}=\frac{-10-2}{-4-5}=\frac{-12}{-9}=\frac{4}{3}$

$$y-y_1=m(x-x_1) \Rightarrow \left[y+2=\frac{4}{3}(x-1)\right] \times 3$$

$$3y+6=4x-4 \Rightarrow 4x-3y-10=0$$ المعادلة الأولى

الميل $m_{(-11,-2)}=\frac{dy}{dx}=\frac{5(-2)-2(-11)}{2(-2)-5(-11)}=\frac{12}{51}$

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

$$\left[y+2=\frac{12}{51}(x+11)\right] \times 51$$

$$51y+102=12x+132$$

$$\therefore 12x-51y+30=0 \quad] \div 3$$

$$4x-17y+10=0$$ المعادلة الثانية.

ⓐ $$\frac{d}{dx}(\sin y) = \cos y \cdot \frac{dy}{dx}$$

أي مشتقة الدالة الدائرية sin × مشتقة الزاوية y

ⓑ $$\frac{d}{dx}(\cos y) = -\sin y \cdot \frac{dy}{dx}$$

أي مشتقة الدالة الدائرية cos × مشتقة الزاوية y

أمثلة : جد

① $\frac{d}{dx}(\sin 5x) = \cos 5x \cdot 5 = 5\cos 5x$

② $\frac{d}{dx}(\cos \frac{x}{2}) = -\sin \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}\sin \frac{x}{2}$

ⓒ $$\frac{d}{dx}(\tan y) = \sec^2 y \cdot \frac{dy}{dx}$$

ⓓ $$\frac{d}{dx}(\cot y) = -\csc^2 y \cdot \frac{dy}{dx}$$

أمثلة : جد

① $\frac{d}{dx}(\tan x^2) = \sec^2 x^2 \cdot 2x = 2x\sec^2 x^2$

② $\frac{d}{dx}(\cot 8x) = -\csc^2 8x \cdot 8 = -8\csc^2 8x$

ⓔ $$\frac{d}{dx}(\sec y) = \sec y \cdot \tan y \cdot \frac{dy}{dx}$$

ⓕ $$\frac{d}{dx}(\csc y) = -\csc y \cdot \cot y \cdot \frac{dy}{dx}$$

امثلة : جد

① $\frac{d}{dx}(\sec 4x) = \sec 4x \cdot \tan 4x \cdot 4$
$= 4\sec 4x \cdot \tan 4x$

② $\frac{d}{dx}(\csc 5x) = -\csc 5x \cdot \cot 5x \cdot 5$
$= -5\csc 5x \cdot \cot 5x$

امثلة أخرى محلولة: جد $f'(x)$ لكل مما يأتي:

① $f(x) = \sin(7x^2 + 4x + 1)$

$f'(x) = \cos(7x^2 + 4x + 1) \cdot (14x + 4) = (14x + 4)\cos(7x^2 + 4x + 1)$

② $f(x) = \sin\sqrt[3]{x} = \sin x^{\frac{1}{3}}$

$\therefore f'(x) = \cos x^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}}$

$= \dfrac{\cos\sqrt[3]{x}}{3\sqrt[3]{x^2}}$

③ $f(x) = \cos^3 7x = (\cos 7x)^3$

$\therefore f'(x) = 3(\cos 7x)^2 \cdot (-\sin 7x) \cdot 7$

$= -21\cos^2 7x \cdot \sin 7x$

④ $f(x) = \cos 3x - \tan 5x + \sec 4x$

$f'(x) = -\sin 3x \cdot 3 - \sec^2 5x \cdot 5 + \sec 4x \tan 4x \cdot 4$

$= -3\sin 3x - 5\sec^2 5x + 4\sec 4x \tan 4x$

⑤ $f(x) = \sqrt[3]{\cot x^2 + \tan 2x} = (\cot x^2 + \tan 2x)^{\frac{1}{3}}$

$f'(x) = \frac{1}{3}(\cot x^2 + \tan 2x)^{-\frac{2}{3}} \cdot (-\csc^2 x^2 \cdot 2x + \sec^2 2x \cdot 2)$

$= \dfrac{-2x\csc^2 x^2 + 2\sec^2 2x}{3\sqrt[3]{(\cot x^2 + \tan 2x)^2}}$

مثال جد معادلة المماس عند $x=0$ اذا علمت أن:

$f(x) = 3\sin x + 4\cos x$

الحل/ نجد نقطة التماس وذلك بتعويض $x=0$ في الدالة $f(x)$ لايجاد y

$\therefore y = f(0) = 3\sin 0 + 4\cos 0 = 3(0) + 4(1) = 4$

$\therefore$ نقطة التماس $(0,4)$

الميل = مشتقة الدالة عند نقطة التماس

$f'(x) = 3\cos x + 4(-\sin x) = 3\cos x - 4\sin x$

$\therefore m = 3\cos 0 - 4\sin 0 = 3(1) - 4(0) = 3$ ميل المماس

$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 4 = 3(x - 0)$

$\therefore y - 4 = 3x \Rightarrow 3x - y + 4 = 0$ معادلة المماس

مثال/ جسم يتحرك على خط مستقيم وفقاً للقاعدة $p(t) = 3\cos 2t$
حيث $p(t)$ م المسافة بالامتار ، t الزمن بالثواني ،
① جد السرعة عند $t = 0$ ② جد التعجيل عند $t = \frac{\pi}{6}$

الحل/

$p(t) = 3\cos 2t$

$V(t) = p'(t) = 3(-\sin 2t) \cdot 2 = -6\sin 2t$ السرعة في أية لحظة او السرعة الآنية

$\therefore V(0) = -6\sin 0 = 0$ m/sec السرعة عند $t=0$

$g(t) = V'(t) = p''(t) = -6\cos 2t \cdot 2 = -12\cos 2t$ التعجيل في أية لحظة التعجيل الآني

$\therefore g(\frac{\pi}{6}) = -12\cos\frac{2\pi}{6} = -12\cos\frac{\pi}{3}$

$= -12(\frac{1}{2}) = -6$ m/sec² التعجيل عند $t = \frac{\pi}{6}$

تمارين (3 - 7)

① جد y'

① $y = \sin(5 - x^3)$

$y' = \cos(5 - x^3) \cdot (-3x^2) = -3x^2\cos(5 - x^3)$

② $y = \sqrt{\cos(4x+2)} = [\cos(4x+2)]^{\frac{1}{2}}$ القاعدة السابعة

$y' = \frac{1}{2}[\cos(4x+2)]^{-\frac{1}{2}}(-\sin(4x+2) \cdot 4)$

$= \frac{-2\sin(4x+2)}{\sqrt{\cos(4x+2)}}$

③ $y = x\sec x^2$ مشتقة حاصل ضرب دالتين

$y' = x \cdot (\sec x^2 \cdot \tan x^2) 2x + 1 \cdot \sec x^2$

$= 2x^2\sec x^2\tan x^2 + \sec x^2$

$= \sec x^2(2x^2\tan x^2 + 1)$

④ $y = \sin 3x \cdot \cos 3x$ مشتقة حاصل ضرب دالتين

$y' = \sin 3x \cdot (-\sin 3x) \cdot 3 + \cos 3x \cdot 3\cos 3x$

$= -3\sin^2 3x + 3\cos^2 3x$

⑤ $y = \sqrt[3]{\cot^2 4x} = (\cot^2 4x)^{\frac{1}{3}} = (\cot 4x)^{\frac{2}{3}}$

$y' = \frac{2}{3}(\cot 4x)^{-1/3} \cdot (-\csc^2 4x) \cdot 4$

$= \frac{-8\csc^2 4x}{3\sqrt[3]{\cot 4x}}$

⑥ $y = \csc^5(x^2+1)$ ممكن ان نعتبر الاس 5 فوق قوس

$y' = 5\csc^4(x^2+1) \cdot [-\csc(x^2+1) \cdot \cot(x^2+1)] \cdot 2x$

$= -10x\csc^5(x^2+1) \cdot \cot(x^2+1)$

⑦ $y = (\sin 3x - \cos 3x)^2$ نفتح القوس اولاً

$= \sin^2 3x - 2\sin 3x\cos 3x + \cos^2 3x$

$= (\sin^2 3x + \cos^2 3x) - (2\sin 3x\cos 3x)$

$= 1 - \sin 6x$

$\therefore y' = -\cos 6x \cdot 6 = -6\cos 6x$ وبطريقة اخرى ممكن استخدام القاعدة السابقة

---

② اذا كانت $\sin xy^2 = 4x - 3y$ جد $\frac{dy}{dx}$

الحل/ مشتقة الدالة ضمنياً

$\sin xy^2 = 4x - 3y$

$\cos xy^2 \cdot (1 \cdot y^2 + x \cdot 2y\frac{dy}{dx}) = 4 - 3\frac{dy}{dx}$

$y^2\cos xy^2 + 2xy\cos xy^2 \frac{dy}{dx} = 4 - 3\frac{dy}{dx}$

$2xy\cos xy^2 \frac{dy}{dx} + 3\frac{dy}{dx} = 4 - y^2\cos xy^2$

$\frac{dy}{dx}(2xy\cos xy^2 + 3) = 4 - y^2\cos xy^2$

$\frac{dy}{dx} = \frac{4 - y^2\cos xy^2}{2xy\cos xy^2 + 3}$

---

③ اثبت صحة:

ⓐ $\frac{d}{dx}\left[\sin ax - \frac{1}{3}\sin^3 ax\right] = a\cos^3 ax$

الحل/

$L.H = \cos ax \cdot a - \frac{1}{3} \cdot 3\sin^2 ax \cdot \cos ax \cdot a$

$= a\cos ax - a\sin^2 ax\cos ax$

$= a\cos ax(1 - \sin^2 ax) = a\cos ax \cdot \cos^2 ax = a\cos^3 ax$ (متطابقة)

$\therefore L.H = R.H$

ⓑ $\frac{d}{dx}\left(\frac{2-\cos x}{2+\cos x}\right)=\frac{4\sin x}{(2+\cos x)^2}$

الحل/

$$L.H=\frac{-(-\sin x)\cdot(2+\cos x)-(-\sin x)(2-\cos x)}{(2+\cos x)^2}$$

$$=\frac{2\sin x+\sin x\cos x+2\sin x-\sin x\cos x}{(2+\cos x)^2}$$

$$=\frac{4\sin x}{(2+\cos x)^2}$$

---

④ جد : y'' المشتقة الثانية

$y=\cos^4 x-\sin^4 x$ حلل بالتجزئة

$$=(\cos^2 x-\sin^2 x)(\cos^2 x+\sin^2 x)$$

$$=\cos 2x \cdot 1$$

$\therefore y=\cos 2x$

$y'=-\sin 2x\cdot 2=-2\sin 2x$ المشتقة الاولى

$y''=-2\cos 2x\cdot 2=-4\cos 2x$

---

⑤ جد معادلة المماس للمنحني $f(x)=\sin 2x+\sin x$ عند $x=\frac{\pi}{2}$

الحل/ نجد نقطة التماس وذلك بتعويض $x=\frac{\pi}{2}$ في الدالة لايجاد y.

$y=f(\frac{\pi}{2})=\sin\frac{2\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{2}=0+1=1$

$\therefore$ نقطة التماس $(\frac{\pi}{2},1)$

نجد المشتقة لان الميل = المشتقة عند نقطة التماس

$f'(x)=\cos 2x\cdot 2+\cos x=2\cos 2x+\cos x$

$\therefore m=2\cos\pi+\cos\frac{\pi}{2}=2(-1)+0=-2$ ميل المماس

$y-y_1=m(x-x_1)\Rightarrow y-1=-2(x-\frac{\pi}{2})\rightarrow$

$y-1=-2x+\pi\Rightarrow 2x+2-1-\frac{\pi}{2}=0$ معادلة المماس

---

⑥ جسم يتحرك على خط مستقيم وفقاً للقاعدة $p(t)=\sin 2t-\cos 2t$

حيث $p(t)$ المسافة بالامتار ، t الزمن بالثواني .

جد كلاً من بعد الجسم ، سرعته وتعجيله عندما $t=\frac{\pi}{4}$

الحل/ نجد بعد الجسم وذلك بتعويض $t=\frac{\pi}{4}$ في الدالة

$p(\frac{\pi}{4})=\sin\frac{2\pi}{4}-\cos\frac{2\pi}{4}$

$p(\frac{\pi}{4}) = \sin\frac{\pi}{2} - \cos\frac{\pi}{2} = 1 - 0 = 1\ m$ بعد الجسم

نجد سرعة الجسم وذلك بأنه: $V(t) = p'(t) = \cos 2t \cdot 2 - (-\sin 2t) \cdot 2$

السرعة الآنية $= 2\cos 2t + 2\sin 2t$

السرعة $\therefore V(\frac{\pi}{4}) = 2\cos\frac{\pi}{2} + 2\sin\frac{\pi}{2} = 2 \cdot (0) + 2 \cdot (1) = 2\ m/sec$

نجد التعجيل وذلك بأن: $g(t) = V'(t) = p''(t) = 2(-\sin 2t) \cdot 2 + 2\cos 2t \cdot 2$

التعجيل الآني $g(t) = -4\sin 2t + 4\cos 2t$

$g(\frac{\pi}{4}) = -4\sin\frac{\pi}{2} + 4\cos\frac{\pi}{2}$

التعجيل $= -4(1) + 4(0) = -4\ m/sec^2$

---

(7) اذا كانت $V(t)$ سم/ثا تمثل سرعة جسم يتحرك على خط مستقيم حيث $V(t) = 4\sin\frac{t\pi}{4} + 8\cos\frac{t\pi}{4}$ جد السرعة والتعجيل عندما $t=1$

الحل

نجد السرعة عند $t=1$

$V(t) = 4\sin\frac{t\pi}{4} + 8\cos\frac{t\pi}{4}$

$V(1) = 4\sin\frac{\pi}{4} + 8\cos\frac{\pi}{4}$

$= 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 8 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{12}{\sqrt{2}} = 6\sqrt{2}\ m/sec$

نجد التعجيل الآني ثم نعوض $t=1$

$g(t) = V'(t) = 4\cos\frac{t\pi}{4} \cdot \frac{\pi}{4} + 8(-\sin\frac{t\pi}{4} \cdot \frac{\pi}{4})$

التعجيل الآني $\therefore g(t) = \pi\cos\frac{t\pi}{4} - 2\pi\sin\frac{t\pi}{4}$

$\therefore g(1) = \pi\cos\frac{\pi}{4} - 2\pi\sin\frac{\pi}{4}$

$= \frac{\pi}{\sqrt{2}} - 2\frac{\pi}{\sqrt{2}} = \frac{\pi - 2\pi}{\sqrt{2}} = \frac{-\pi}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}\pi}{2}\ m/sec^2$

اسئلة اثرائية واجب: جد مشتقات كل من الدوال التالية:

(a) $f(x) = 4x^3(3x-2)^4$

(b) $f(x) = x^2\sqrt{3-x}$ $\quad 3 - x \geq 0$

(2) اذا كان $y = 3x^2 - x$ ، $x = n^2 + 1$ جد $\frac{dy}{dx}$ بدلالة n

(3) جد معادلة المماس لمنحني الدالة $f(x) = x^2 - x - 6$ عند نقطتي تقاطعها مع محور السينات (ملاحظة افرض $y = f(x) = 0$ وجد قيم x لتمثل نقاط التقاطع)

الفصل الثامن
chapter 8

Space Geometry الهندسة الفضائية (المجسمة)

عبارة اولية: لكل ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة يوجد مستوٍ واحد فقط (وحيد) يحويها.

ومنها نحصل على:

1) لكل مستقيم ونقطة لا تنتمي إليه يوجد مستوٍ وحيد يحويهما.

2) لكل مستقيمين متقاطعين يوجد مستوٍ وحيد يحويهما.

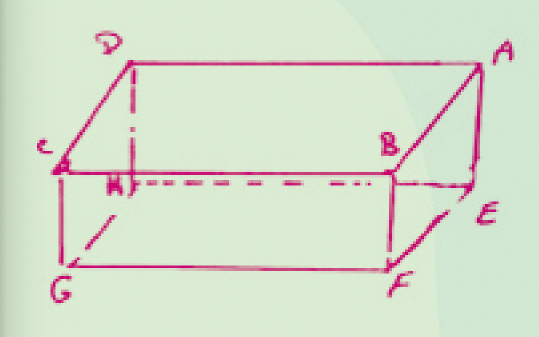
3) لكل مستقيمين متوازيين يوجد مستوٍ وحيد يحويهما.

العلاقة بين مستقيمين في الفضاء

1) المستقيمان المتقاطعان: Intersecting lines: وهما المستقيمان اللذان يشتركان بنقطة واحدة فقط وهما في مستوٍ واحد

2) المستقيمان المتوازيان: Parallel lines: وهما المستقيمان اللذان لا يشتركان بأية نقطة وهما في مستوٍ واحد.

3) المستقيمان المتخالفان: skew lines: وهما المستقيمان اللذان لا يمكن أن يحويهما مستوٍ واحد. (اي انهما غير متوازيين وغير متقاطعين).



مثال على المستقيمات المتخالفة : في الشكل المجاور

$\overleftrightarrow{AB}$ يخالف $\overleftrightarrow{GF}$

$\overleftrightarrow{BC}$ يخالف $\overleftrightarrow{EF}$

$\overleftrightarrow{AD}$ يخالف $\overleftrightarrow{GH}$ وهكذا .

العلاقة بين مستقيم ومستوي :

ليكن المستوي (X) والمستقيم $\overleftrightarrow{AB}$

① المستقيم الموازي للمستوي : اذا لم يشترك معه بأي نقطة أو كان محتوى فيه

$\overleftrightarrow{AB} \cap (X) = \Phi$

$\therefore \overleftrightarrow{AB} \parallel (X)$

$\overleftrightarrow{AB} \subset (X)$

② المستقيم القاطع للمستوي : اذا اشترك معه بنقطة واحدة فقط

$\overleftrightarrow{AB} \cap (X) = \{C\}$

العلاقة بين مستويين في الفضاء :

① المستويان المتوازيان : اذا لم يشتركا بأية نقطة

$(X) \cap (Y) = \Phi \Rightarrow (X) \parallel (Y)$

② المستويان المتقاطعان : اذا اشتركا بمستقيم واحد

$(X) \cap (Y) = \overleftrightarrow{AB}$

نلاحظ انه اذا اشترك المستويان بنقطة فانهما يشتركان بخط مستقيم يحوي جميع النقاط المشتركة بين المستويين المتقاطعين ويسمى (مستقيم التقاطع) ويكون محتوى في كليهما .

ملاحظة: ① التساوي ويعني تطابق الشيئين الواحد

② كل مستقيم يوازي نفسه.

③ كل مستوي يوازي نفسه.

ومما تقدم نستنتج:

① اذا توازى مستقيمان فالمستوي المار بأحدهما ونقطة من الآخر فإنه يحويهما

$\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

$\overleftrightarrow{AB} \subset (X) \quad , \; C \in (X)$

$\therefore \overleftrightarrow{CD} \subset (X)$

② المستوي الذي يقطع أحد مستقيمين متوازيين يقطع الآخر

$\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

$\overleftrightarrow{AB}$ يقطع (X) في E فان $\overleftrightarrow{CD}$ يقطع (X) في F



③ اذا توازى مستويان فالمستقيم المحتوى في احدهما يوازي الآخر.

$(X) \parallel (Y)$

$\overleftrightarrow{AB} \subset (X)$

فان $\overleftrightarrow{AB} \parallel (Y)$

دار الاعرجي دائما

يخلينه متفوقين وفرحانين





برهنة (١)

خطا تقاطع مستويين متوازيين بمستوٍ ثالث متوازيين .

المعطيات :

$(X) // (Y)$

$(X) \cap (Z) = \overleftrightarrow{AB}$

$(Y) \cap (Z) = \overleftrightarrow{CD}$

المطلوب اثباته: $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$

البرهان :

$(X) \cap (Z) = \overleftrightarrow{AB}$ (معطى)

$(Y) \cap (Z) = \overleftrightarrow{CD}$ (معطى)

$\therefore \overleftrightarrow{AB} \subset (X) \quad , \overleftrightarrow{AB} \subset (Z)$

$\overleftrightarrow{CD} \subset (Y) \quad , \overleftrightarrow{CD} \subset (Z)$

(مستقيم التقاطع يحوي جميع النقاط المشتركة بين المستويين المتقاطعين)

في (Z) اذا لم يكن $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$ سوف يتقاطعان في نقطة مثل E

$\therefore E \in \overleftrightarrow{AB} \subset (X) \Rightarrow E \in (X)$

$E \in \overleftrightarrow{CD} \subset (Y) \Rightarrow E \in (Y)$

(مستقيم التقاطع يحوي جميع النقاط المشتركة بين المستويين المتقاطعين)

$\therefore E \in (X) \cap (Y)$ (لاشتراكهما في نقطة)

وهذا خلاف الفرض لان $(X) // (Y)$

$\therefore \overleftrightarrow{AB}$ لا يقطع $\overleftrightarrow{CD}$ ولا يحتويه $\therefore \overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$

(المستقيمان الواقعان في مستوي واحد وغير متقاطعان فهما متوازيان)

وهو المطلوب

نتيجة : المستقيم الذي يقطع أحد مستويين متوازيين يقطع الآخر

المعطيات : $(X) // (Y)$ ، $\overleftrightarrow{AB}$ يقطع (X) في B

المطلوب اثباته : $\overleftrightarrow{AB}$ يقطع (Y)

البرهان : لتكن $E \in (Y)$

نرسم $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{EN}$ (يمكن رسم مستقيم يوازي المستقيم آخر من نقطة لا تنتمي اليه)

نعين (Z) بالمستقيمين المتقاطعين $\overleftrightarrow{AB}$ ، $\overleftrightarrow{EF}$ (يتعين مستوٍ وحيد بمستقيمين متقاطعين)

$\therefore \overleftrightarrow{EM} // \overleftrightarrow{FB}$ (خطا تقاطع مستويين بمستوٍ ثالث متوازيين) .

$\therefore \overleftrightarrow{AB}$ يقطع (Y) في M

وهو المطلوب

مبرهنة (2): اذا توازى مستقيمان فان المستوي الذي يحوي أحدهما يوازي الآخر.

المعطيات: $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$, $\overleftrightarrow{CD} \subset (x)$

المطلوب إثباته: $\overleftrightarrow{AB} \parallel (x)$

البرهان:

اذا كان $\overleftrightarrow{AB}$ لا يوازي (x) فيقطعه في نقطة مثل E

$\because \overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ (معطى)

$\therefore \overleftrightarrow{CD}$ يقطع (x) (المستقيم الذي يقطع أحد مستقيمين متوازيين يقطع الآخر).

وهذا خلاف الفرض لأن $\overleftrightarrow{CD} \subset (x)$

$\therefore \overleftrightarrow{AB} \cap (x) = \Phi \Rightarrow \overleftrightarrow{AB} \parallel (x)$ وهو المطلوب

مبرهنة (3): المستقيمان الموازيان لمستقيم ثالث في الفراغ متوازيان.

المعطيات: $\overleftrightarrow{L} \parallel \overleftrightarrow{R}$, $\overleftrightarrow{K} \parallel \overleftrightarrow{R}$

المطلوب إثباته: $\overleftrightarrow{L} \parallel \overleftrightarrow{K}$

البرهان:

لتكن $A \in \overleftrightarrow{K}$

بالمستقيم $\overleftrightarrow{L}$ والنقطة A نعين (x) (يتعين المستوي بمستقيم ونقطة لا تنتمي اليه)

اذا لم يكن $\overleftrightarrow{K} \subset (x)$ فان $\overleftrightarrow{K}$ يقطع (x) في A .

$\therefore (x)$ يقطع $\overleftrightarrow{R}$ وهذا مستحيل (المستوي الذي يقطع احد مستقيمين متوازيين يقطع الآخر)

$\therefore \overleftrightarrow{K} \subset (x) \Rightarrow$ في (x) اذا لم يكن $\overleftrightarrow{K} \parallel \overleftrightarrow{L}$ فانهما يتقاطعان في نقطة مثل M .

ينتج وجود مستقيمين من M يوازيان $\overleftrightarrow{R}$ وهذا غير ممكن (عبارة التوازي)

$\therefore \overleftrightarrow{K}$ لا يقطع $\overleftrightarrow{L} \Leftarrow \overleftrightarrow{L} \parallel \overleftrightarrow{K}$

وهو المطلوب .

مبرهنة (4)

مستقيم تقاطع مستويين يوازي كل مستقيم محتوى في احدهما ويوازي الآخر.

المعطيات:

$(X) \cap (Y) = \overleftrightarrow{AB}$

$\overleftrightarrow{CD} \subset (Y)$, $\overleftrightarrow{CD} // (X)$

المطلوب اثباته:

$\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$

البرهان:

$\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{CD} \subset (Y)$

$\overleftrightarrow{CD} // (X)$ (معطى)

في (Y) لو كان $\overleftrightarrow{CD}$ يقطع $\overleftrightarrow{AB}$ لنتج أن $\overleftrightarrow{CD}$ يقطع (X)

(مستقيم التقاطع يحوي جميع النقاط المشتركة بين المستويين المتقاطعين)

وهذا خلاف الفرض حيث:

$\overleftrightarrow{CD} // (X)$

$\therefore \overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$

و.هـ.م

نتيجة: اذا وازى مستقيم مستوياً معلوماً فالمستقيم المرسوم من أية نقطة من نقاط المستوي موازياً للمستقيم المعلوم يكون محتوى في المستوي.

المعطيات:

$C \in (X)$, $\overleftrightarrow{AB} // (X)$, $\overleftrightarrow{CD} // \overleftrightarrow{AB}$

المطلوب اثباته:

$\overleftrightarrow{CD} \subset (X)$

البرهان:

ان لم يكن $\overleftrightarrow{CD} \subset (X)$ فيكون قاطعاً له في نقطة C

$\therefore$ (X) يقطع $\overleftrightarrow{AB}$ (المستوي الذي يقطع احد مستقيمين متوازيين يقطع الآخر).

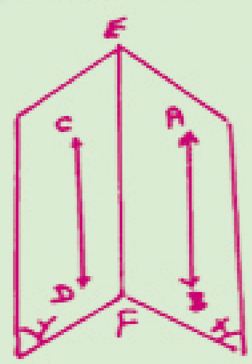
وهذا خلاف للفرض حيث $\overleftrightarrow{AB} // (X)$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{CD}$ لا يقطع (X)

$\therefore \overleftrightarrow{CD} \subset (X)$

وهو المطلوب.

مثال اذا احتوى كل من مستويين متقاطعين على احد مستقيمين متوازيين فمستقيم التقاطع يوازي كلاً من المستقيمين المتوازيين .



المعطيات: $\overleftrightarrow{CD} \subset (Y)$, $\overleftrightarrow{AB} \subset (X)$, $(X) \cap (Y) = \overleftrightarrow{EF}$

$\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$

المطلوب اثباته: $\overleftrightarrow{EF} // \overleftrightarrow{AB} , \overleftrightarrow{CD}$

البرهان :

$\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$ (معطى)

$\overleftrightarrow{CD} \subset (Y)$

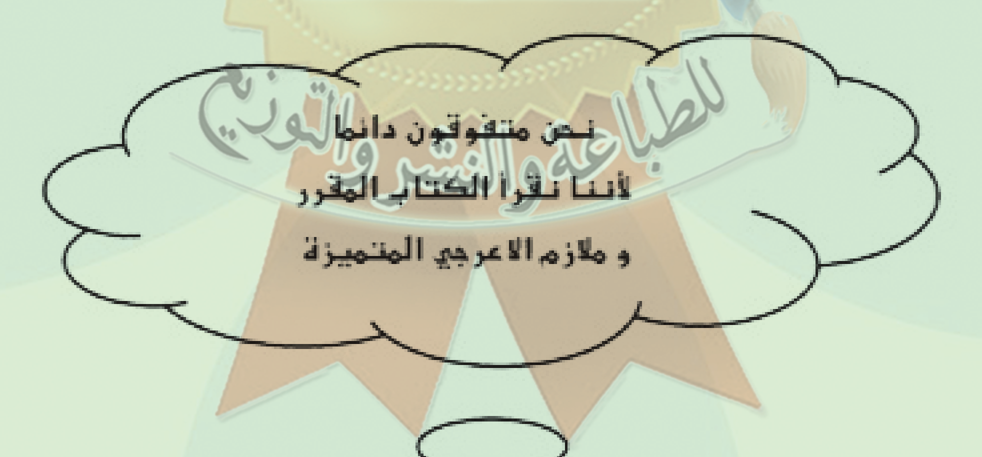
$\therefore \overleftrightarrow{AB} // (Y)$ (اذا توازى مستقيمان فالمستوي الذي يحوي احدهما يوازي الآخر)

$\because \overleftrightarrow{AB} \subset (X)$ (معطى)

$\therefore \overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{EF}$ مبرهنة 4 مستقيم تقاطع مستويين يوازي كل مستقيم محتوى في احدهما ويوازي الآخر.

$\therefore \overleftrightarrow{CD} // \overleftrightarrow{EF}$ (المستقيمان الموازيان لمستقيم ثالث متوازيان)

وهو المطلوب





تمارين (1 - 8)

1/ اي من العبارات الآتية خاطئة واي منها صائبة وبين السبب :

ⓐ اذا كان $\overleftrightarrow{AB} // (X)$ فيوجد مستقيم وحيد يوازيه $\overleftrightarrow{AB}$ ويحتوى في (X)

(صائبة) حسب نتيجة (1) من مبرهنة 4

ⓑ يوجد مستو وحيد موازي لمستوي معلوم .

(خاطئة) يوجد مستو وحيد موازي لمستوي معلوم من نقطة معلومة .

ⓒ المستقيمان الموازيان لمستو واحد متوازيان .

(خاطئة) ممكن ان يكونا المستقيمان متخالفان وكل منهما يوازي المستوي

ⓓ اذا وازى ضلعان من مثلث مستوياً معلوماً كان ضلعه الثالث موازياً للمستوي المعلوم .

(صائبة) لانه ضلعا المثلث يكونان مستوياً والضلع الثالث محتوى في المستوي الذي يوازي المستوي المعلوم .

ⓔ المستقيمات المخالفات لمستقيم ثالث متخالفات .

(خاطئة) ممكن ان يكونا متوازيان .

ⓕ اذا كان (X) ، (Y) مستويين غير متوازيين فانهما يتقاطعان بنقطة واحدة .

(خاطئة) يتقاطعان بمستقيم واحد

ⓖ اذا كان $A, B \in (X)$ فان $\overleftrightarrow{AB} \cap (X) = \{A, B\}$

(خاطئة) لأنه $\overleftrightarrow{AB} \cap (X) = \overleftrightarrow{AB}$ حيث يتعين المستقيم بنقطتين وان $\overleftrightarrow{AB} \subset (X)$.

ⓗ كل مستقيم يمكن ان يمر به عدد غير منتهي من المستويات .

(صائبة) (يتقاطع كل مستويين بمستقيم واحد فقط .

ⓘ عدد المستويات المختلفة المارة بثلاث نقاط مختلفة ليست على استقامة واحدة هو ثلاث مستويات .

(خاطئة) لانه عدد المستويات هو مستو واحد فقط .

ⓙ يوجد مستو وحيد يحوي مستقيمين متخالفان .

(خاطئة) لانه المستقيمان المتخالفان لا يحويهما مستوي واحد .

2/ صحح ماتراه خطأ في العبارات التالية :

ⓐ اذا كان $\overleftrightarrow{L} \cap (X) = \{A\}$ ، $\overleftrightarrow{K} \subset (X)$ فان $\overleftrightarrow{L} \cap \overleftrightarrow{K} = \{A\}$ حيث $A \in (X)$

(خاطئة) الا اذا كان $A \in \overleftrightarrow{K}$.

(ب) يتقاطع المستويان المختلفان في مستقيم.

(خاطئة) في مستقيم واحد.

(ج) اذا كان تقاطع المستقيم $\overleftrightarrow{L}$ والمستوي (X) يساوي ϕ فانه $\overleftrightarrow{L} // (X)$

(صحيحة)

(د) اذا كان المستقيم $\overleftrightarrow{L} // (X)$ فان $\overleftrightarrow{L} \cap (X) = \{A\}$ حيث $A \in (X)$

(خاطئة) اذا كان $\overleftrightarrow{L} // (X)$ فان $\overleftrightarrow{L} \cap (X) = \phi$

(هـ) اذا كان المستقيم $\overleftrightarrow{K} \subset (X)$ فان $\overleftrightarrow{K} \cap (X) = \phi$

العبارة (خاطئة) $\overleftrightarrow{K} \subset (X)$ فان $\overleftrightarrow{K} \cap (X) = \overleftrightarrow{K}$

(و) يكون المستويان متوازيين اذا اشتركا في نقطة واحدة على الأقل.

(خاطئة) اذا لم يشتركا بأية نقطة

(ز) المستقيم المحتوى في احد مستويين متوازيين يقطع المستوي الآخر.

(خاطئة) يوازي المستوي الآخر.

(ح) يكون المستقيم محتوى في المستوي عندما يشترك معه بنقطة واحدة على الأقل

(خاطئة) بنقطتين على الأقل

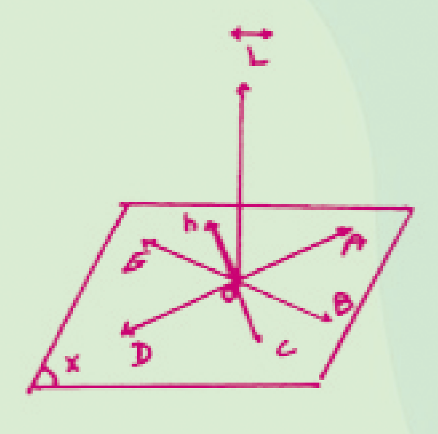
(ط) اذا توازى مستقيمان ومر بكل منهما مستوٍ وتقاطع المستويان فان مستقيم تقاطعهما يقطع كل من المستقيمين.

(خاطئة) بدل يقطع يوازي.

(ي) اذا قطع مستوٍ كلاً من مستويين متوازيين فان خطي تقاطعه معهما يكونان متخالفان.

(خاطئة) متوازيان.

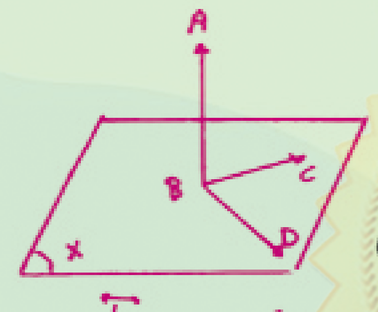
تعامد المستقيمات والمستويات :



تعريف : ① المستقيم العمودي على مستوٍ يكون عمودياً على جميع المستقيمات المرسومة من أثره ضمن ذلك المستوي .

$\overleftrightarrow{OA}, \overleftrightarrow{OB}, \overleftrightarrow{OC}, \overleftrightarrow{OD}, \overleftrightarrow{OG}, \overleftrightarrow{OH} \dots \subset (x)$

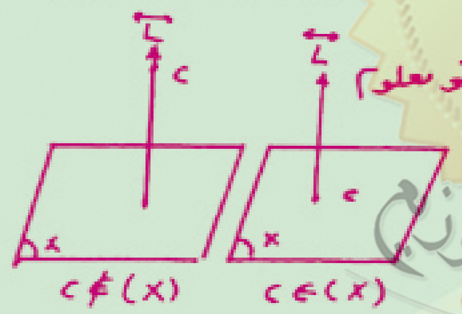
$\overleftrightarrow{L} \perp (x) \Rightarrow \overleftrightarrow{L} \perp \overleftrightarrow{OA}, \overleftrightarrow{L} \perp \overleftrightarrow{OB}, \overleftrightarrow{L} \perp \overleftrightarrow{OC}, \overleftrightarrow{L} \perp \overleftrightarrow{OD} \dots$



② المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين من نقطة تقاطعهما يكون عمودياً على مستويهما

$\overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{BD} \subset (x), \overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{BD} \therefore \overleftrightarrow{AB} \perp (x)$

(الشرط اللازم والكافي كي يكون المستقيم عمودياً على المستوي)



③ من نقطة معلومة يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على مستوٍ معلوم

c نقطة اما تنتمي أو لا تنتمي الى (x) فيوجد مستقيم وحيد $\overleftrightarrow{L}$ يمر من c وعمودي على (x)

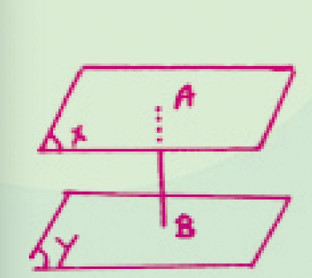
④ يكون المستقيم $\overleftrightarrow{AB}$ مائلاً على المستوي (x) اذا كان قاطعاً له وغير عمودي عليه

$\overleftrightarrow{AB} \cap (x) = \{C\}$

$\overleftrightarrow{AB} \not\perp (x) \Rightarrow$ $\overleftrightarrow{AB}$ مائل على (x)

ملاحظة: يكون المستقيم مائلاً على المستوي اذا لم يكن عمودياً عليه .

⑤ يقال للطول قطعة المستقيم المحددة بنقطة معلومة وأثر العمود النازل منها على المستوي المعلوم [بعد النقطة المعلومة المفروضة من المستوي] .

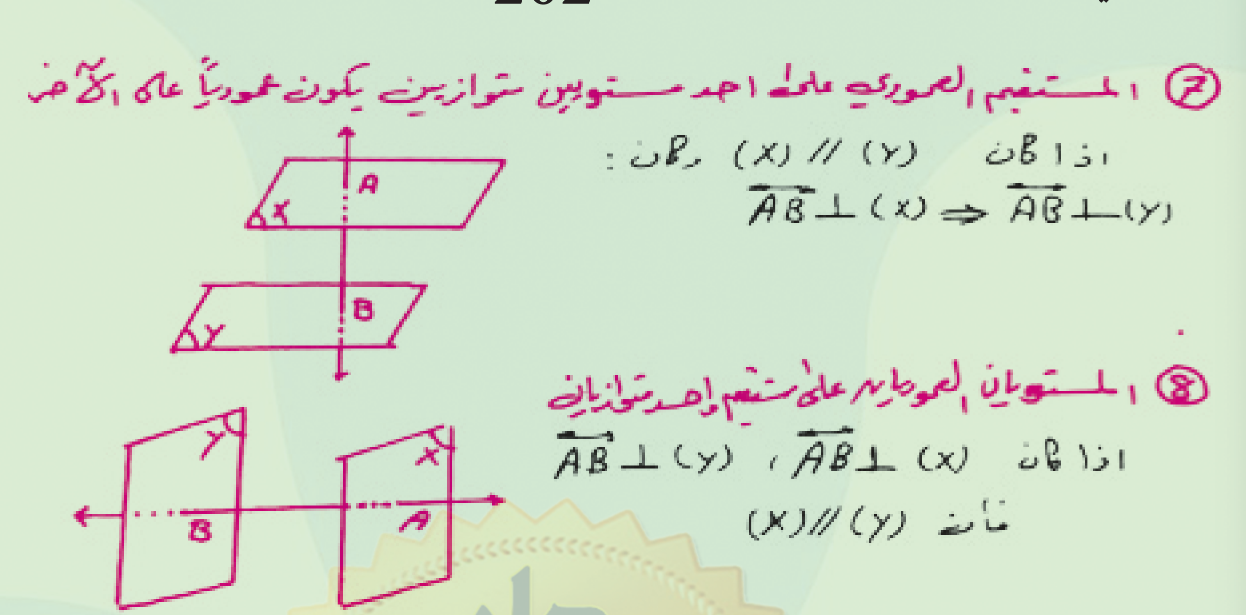


⑥ يقال لطول القطعة المستقيمة العمودية على مستويين والمحددة بهما [البعد بين المستويين المتوازيين]

ملاحظة: البعد بين مستويين متوازيين ثابت

اذا كان $\overline{AB} \perp (Y), \overline{AB} \perp (X), (X) // (Y)$

$\therefore$ $\overline{AB}$ يمثل البعد بين (X) ، (Y) .



⑦ المستقيم العمودي على احد مستويين متوازيين يكون عمودياً على الآخر

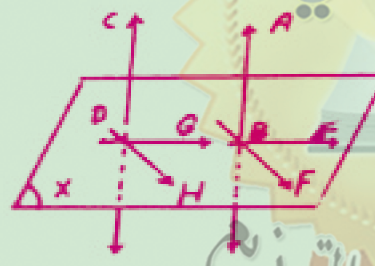
اذا كان $(X) // (Y)$ وكان:
$\overleftrightarrow{AB} \perp (X) \Rightarrow \overleftrightarrow{AB} \perp (Y)$

⑧ المستويان العموديان على مستقيم واحد متوازيان

اذا كان $\overleftrightarrow{AB} \perp (X)$ ، $\overleftrightarrow{AB} \perp (Y)$

فان $(X) // (Y)$

مبرهنة 5 : المستوي العمودي على احد مستقيمين متوازيين يكون عمودياً على الآخر



المعطيات: $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$ ، $\overleftrightarrow{AB} \perp (X)$

المطلوب اثباته: $\overleftrightarrow{CD} \perp (X)$

البرهان:

$\overleftrightarrow{CD} \cap (X) = \{D\}$ (المستوي الذي يقطع احد مستقيمين متوازيين يقطع الآخر)

نرسم في (X) $\overleftrightarrow{BE}$ ، $\overleftrightarrow{BF}$

ثم نرسم: $\overleftrightarrow{DG} // \overleftrightarrow{BE}$ ، $\overleftrightarrow{DH} // \overleftrightarrow{BF}$ } عبارة التوازي

$\therefore m\angle ABE = m\angle CDG$ (اذا وازى ضلعا زاوية ضلعي زاوية اخرى تساوت قياسيهما وتوازى مستوياهما)

$m\angle ABF = m\angle CDH$

$\overleftrightarrow{AB} \perp (X)$ (معطى)

$\therefore \overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BE}, \overleftrightarrow{BF}$ (العمود على مستوي يكون عمودياً على جميع المستقيمات المرسومة من اثره ضمن ذلك المستوي)

$\therefore m\angle ABE = m\angle CDG = 90°$

$m\angle ABF = m\angle CDH = 90°$

$\therefore \overleftrightarrow{CD} \perp (X)$ (المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين من نقطة تقاطعهما يكون عمودياً على مستويهما)

وهو المطلوب.

نتيجة: المستقيمان العموديان على مستوٍ واحد متوازيان.

المعطيات: $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{CD} \perp (X)$

المطلوب اثباته: $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

البرهان: ان لم يكن $\overleftrightarrow{CD} \parallel \overleftrightarrow{AB}$

من $D \in (X)$ نرسم $\overleftrightarrow{DE} \parallel \overleftrightarrow{AB}$

(يمكن رسم مستقيم وحيد موازٍ لآخر من نقطة لا تنتمي إليه)

$\because \overleftrightarrow{AB} \perp (X)$ (معطى)

$\therefore \overleftrightarrow{DE} \perp (X)$ (المستوي العمودي على احد مستقيمين متوازيين يكون عمودياً على الآخر)

$\because \overleftrightarrow{CD} \perp (X)$ (معطى)

أصبح من D وجود مستقيمين عموديين على (X) وهذا غير ممكن

(من نقطة معلومة يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على مستوٍ معلوم)

$\therefore \overleftrightarrow{DE} = \overleftrightarrow{DC}$

$\therefore \overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

وهو المطلوب

مبرهنة (6)

مبرهنة الأعمدة الثلاثة: اذا رسم من نقطة في مستوٍ مستقيمان أحدهما عمودي على المستوي والآخر عمودي على مستقيم معلوم في المستوي فالمستقيم الواصل بين اية نقطة من نقط المستقيم العمودي على المستوي ونقطة تلاقي المستقيمين يكون عمودياً على المستقيم المعلوم في المستوي

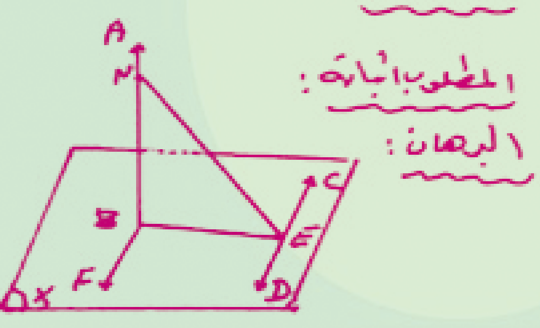
المعطيات: $B \in (X),\ \overleftrightarrow{CD} \subset (X),\ \overleftrightarrow{AB} \perp (X),\ \overleftrightarrow{BE} \perp \overleftrightarrow{CD}$

المطلوب اثباته: $\forall N \in \overleftrightarrow{AB} \Rightarrow \overleftrightarrow{NE} \perp \overleftrightarrow{CD}$

البرهان: من نقطة B نرسم $\overleftrightarrow{BF} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ عبارة توازيا

$\because CD \subset (X)$ (معطى) $\rightarrow \overleftrightarrow{BF} \subset (X)$

(اذا توازى مستقيمان فالمستوي الذي يحوي احدهما ونقطة من الآخر يحتويهما)



$\therefore \overleftrightarrow{BE} \perp \overleftrightarrow{CD}$ (معطى)

$\rightarrow \overleftrightarrow{BF} \perp \overleftrightarrow{BE}$ (في المستوي الواحد المستقيم العمود على احد مستقيمين متوازيين يكون عمودياً على الآخر)

$\because \overleftrightarrow{AB} \perp (X)$ (معطى)

$\therefore \overleftrightarrow{NB} \perp \overleftrightarrow{BF}$ (المستقيم العمودي على مستوٍ يكون عمودياً على جميع المستقيمات المرسومة من أثره ضمن ذلك المستوي)

$\rightarrow \overleftrightarrow{BF} \perp (NBE)$ (المستوي العمودي على احد مستقيمين متوازيين يكون عمودياً على الآخر)

$\therefore \overleftrightarrow{EN} \perp \overleftrightarrow{CD}$ (المستقيم العمودي على مستوٍ يكون عمودياً على جميع المستقيمات المرسومة من أثره ضمن ذلك المستوي)

وهذا شأن كل مستقيم يصل أية نقطة من نقاط $\overleftrightarrow{AB}$ بالنقطة E يكون عمودياً على $\overleftrightarrow{CD}$

وهو المطلوب.

نتيجة مبرهنة (6) عكس مبرهنة الأعمدة الثلاثة.

س/ اذا رسم من نقطة لا تنتمي الى مستوٍ معلوم مستقيمان أحدهما عمودي على المستوي والآخر عمودي على مستقيم معلوم في المستوي. فالمستقيم الواصل بين أثري العمودين يكون عمودياً على المستقيم المعلوم في المستوي

المعطيات: $\overleftrightarrow{AB} \perp (X)$ ، $\overleftrightarrow{CD} \subset (X)$ ، $A \notin (X)$

$\overleftrightarrow{AE} \perp \overleftrightarrow{CD}$

المطلوب اثباته: $\overleftrightarrow{BE} \perp \overleftrightarrow{CD}$

البرهان: ان لم يكن $\overleftrightarrow{BE} \perp \overleftrightarrow{CD}$ من نقطة B نرسم:

$\overleftrightarrow{NB} \perp \overleftrightarrow{CD}$ (يمكن رسم مستقيم عمود وحيد على مستقيم معلوم من نقطة لا تنتمي اليه).

$\therefore \overleftrightarrow{AB} \perp (X)$ (معطى)

$\overleftrightarrow{AN} \perp \overleftrightarrow{CD}$ (مبرهنة الأعمدة الثلاثة)

$\overleftrightarrow{AE} \perp \overleftrightarrow{CD}$ (معطى)

$\therefore \overleftrightarrow{AN} \equiv \overleftrightarrow{AE}$ (يمكن رسم مستقيم عمود وحيد على مستقيم معلوم من نقطة لا تنتمي اليه)

$\therefore A = E \rightarrow \overleftrightarrow{BE} \equiv \overleftrightarrow{BN}$

$\therefore \overleftrightarrow{BE} \perp \overleftrightarrow{CD}$

وهو المطلوب.

((امثلة محلولة))

① مثلث BCD قائم الزاوية في B ، A نقطة ليست في مستوي هذا المثلث حيث $AC = CD$ ، $AB = BD$ برهن ان $\overline{BC}$ عمودي على مستوي المثلث ABD .

المعطيات: المثلث BCD قائم الزاوية في B

$A \notin (BCD)$, $AB = BD$, $AC = CD$

المطلوب اثباته: $\overline{BC} \perp (ABD)$

البرهان: المثلثان ABC ، BCD

$AB = BD$ (معطى)

$AC = CD$

$\overline{BC}$ مشترك

∴ يتطابق المثلثان (لتساوي ثلاثة اضلاع)

من التطابق ينتج $m\angle CBD = m\angle ABC = 90°$

∴ $\overline{BC} \perp \overline{BD}$ معطى ($m\angle BCD = 90°$)

$\overline{BC} \perp \overline{AB}$ بالبرهان ($m\angle ABC = 90°$)

∴ $\overline{BC} \perp (ABD)$ (المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين من نقطة تقاطعهما يكون عمودياً على مستويهما) وهو المطلوب

---

② $\overline{AB}$ قطر في دائرة من نقطة مثل C على الدائرة رسم $\overleftrightarrow{CD} \perp$ مستوي الدائرة برهن أن $\overline{AC}$ عمودي على المستوي (BCD)

المعطيات: $\overline{AB}$ قطر دائرة ، C نقطة على الدائرة

$\overline{CD}$ عمود على مستوي الدائرة

المطلوب اثباته: $\overline{AC} \perp (BCD)$

البرهان: ∵ $\overline{AB}$ قطر دائرة مركزها O (معطى)

∴ $m\angle ACB = 90°$ (الزاوية المحيطية المرسومة في نصف دائرة قائمة)

∴ $\overline{AC} \perp \overline{BC}$

$\overline{CD} \perp (ABC)$ (معطى)

$\overline{AC} \perp \overline{CD}$ (المستقيم العمودي على مستوي يكون عمودياً على جميع المستقيمات المرسومة من أثره..)

$\overline{AC} \perp (BCD)$ (المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين من نقطة تقاطعهما يكون عمودياً على مستويهما) وهو المطلوب .

③ مثلث ABC قائم الزاوية في B ، $\overline{AE} \perp (ABC)$ ، النقطة D منتصف $\overline{CE}$ النقطة N منتصف $\overline{AB}$ برهن على ان $\overline{AB} \perp \overline{ND}$

المعطيات: مثلث قائم الزاوية في B ، ABC ، $\overline{AE} \perp (ABC)$
D منتصف $\overline{CE}$ ، N منتصف $\overline{AB}$.

المطلوب اثباته: $\overline{AB} \perp \overline{ND}$

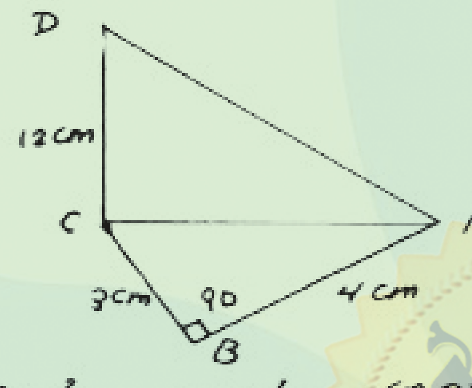
البرهان: لتكن M منتصف $\overline{AC}$
∵ D منتصف $\overline{CE}$
N منتصف $\overline{AB}$ (معطى)

$\overline{MD} \parallel \overline{AE}$ (قطعة المستقيم الواصل بين منتصفي ضلعي مثلث توازي الضلع الثالث)
$\overline{MN} \parallel \overline{BC}$
∵ $\overline{AE} \perp (ABC)$ (معطى)
∴ $\overline{MD} \perp (ABC)$ (المستوي العمودي على احد مستقيمين متوازيين يكون عمودياً على الآخر)
∵ ∢B زاوية قائمة (معطى)
⇒ $\overline{AB} \perp \overline{BC}$ (اذا كان قياس الزاوية بين مستقيمين متقاطعين 90 فان المستقيمين متعامدين)
∴ $\overline{MN} \perp \overline{AB}$ (المستقيم العمودي على احد مستقيمين متوازيين يكون عمودياً على الآخر)
∴ $M \in (ABC)$
⇒ $\overline{MD} \perp (ABC)$ ، $\overline{MN} \perp \overline{AB}$ ، $\overline{AB} \subset (ABC)$
∴ $\overline{AB} \perp \overline{ND}$ (مبرهنة الاعمدة الثلاثة)

وهو المطلوب .

تمارين (2 - 8)

1) ABC مثلث قائم الزاوية في B ، $AB = 4cm$ ، $BC = 3cm$
رسم $\overline{CD} \perp (ABC)$ بحيث $CD = 12cm$ جد طول AD



المعطيات: ABC مثلث قائم الزاوية في B

$AB = 4cm$ ، $BC = 3cm$ رسم

$\overline{CD} \perp (ABC)$ بحيث $CD = 12cm$

المطلوب اثباته: ايجاد طول AD

البرهان: في $\triangle ABC$ القائم في B

$(AC)^2 = (BC)^2 + (AB)^2$ (فيثاغورس)

$(AC)^2 = 9 + 16 = 25 \Longrightarrow AC = 5\ cm$

$\because \overline{CD} \perp (ABC)$ معطى

$\therefore \overline{CD} \perp \overline{AC}$ (المستقيم العمودي على مستوي يكون عمودياً على جميع المستقيمات المرسومة من أثره ضمن المستوي)

$(DA)^2 = (DC)^2 + (AC)^2$ (فيثاغورس)

$= 144 + 25 = 169$

$\therefore DA = AD = \sqrt{169} = 13\ cm$

وهو المطلوب.

2/ برهن على ان المستقيمين العمودين على مستويين متقاطعين لا يتوازيان.

المعطيات: $(X) \cap (Y) = \overleftrightarrow{AB}$

$\overleftrightarrow{M} \perp (Y)$

$\overleftrightarrow{L} \perp (X)$

المطلوب اثباته: $\overleftrightarrow{L} \nparallel \overleftrightarrow{M}$

البرهان: نفرض $\overleftrightarrow{L} \parallel \overleftrightarrow{M}$

$\because \overleftrightarrow{M} \perp (Y) \rightarrow \overleftrightarrow{L} \perp (Y)$

(المستوي العمودي على احد مستقيمين متوازيين يكون عمودياً على الآخر)

لكن $\overleftrightarrow{L} \perp (X)$ (معطى)

$\therefore (X) \parallel (Y)$ المستويان العموديان على

وهذا خلاف الفرض لان (X) ، (Y) متقاطعات

$\therefore \overleftrightarrow{L} \nparallel \overleftrightarrow{M}$ (وهو المطلوب)

③ في $\triangle ABC$ ، $m\angle A = 30^\circ$ ، $\overline{BD} \perp (ABC)$ ، $BD = 5cm$ ، $AB = 10cm$

فإذا كان $\overline{BH}$ عمودي على $\overline{AC}$ جد قياس $\angle BHD$

المعطيات: $\triangle ABC$ ، $m\angle A = 30^\circ$ ، $\overline{BA} \perp (ABC)$

$BD = 5cm$ ، $AB = 10cm$ ، $\overline{BH} \perp \overline{AC}$

المطلوب اثباته: ايجاد قياس $m\angle BHD$

البرهان:

$\because \overline{DB} \perp (ABC)$ معطى

$\overline{BH} \perp \overline{AC}$ معطى

$\therefore \overline{DH} \perp \overline{AC}$ (مبرهنة الاعمدة الثلاثة)

في $\triangle AHB$ القائم في H

$$\sin 30^\circ = \frac{HB}{AB} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{HB}{10} \Rightarrow HB = 5\ cm$$

$\because \overline{DB} \perp (ABC)$ معطى

$\therefore \overline{DB} \perp \overline{BH}$ (المستقيم العمودي على مستوي يكون عمودياً على جميع المستقيمات المرسومة من أثره ضمن المستوي)

في المثلث القائم HBD في B

$$\tan \angle DHB = \frac{DB}{HB} = \frac{5}{5} = 1$$

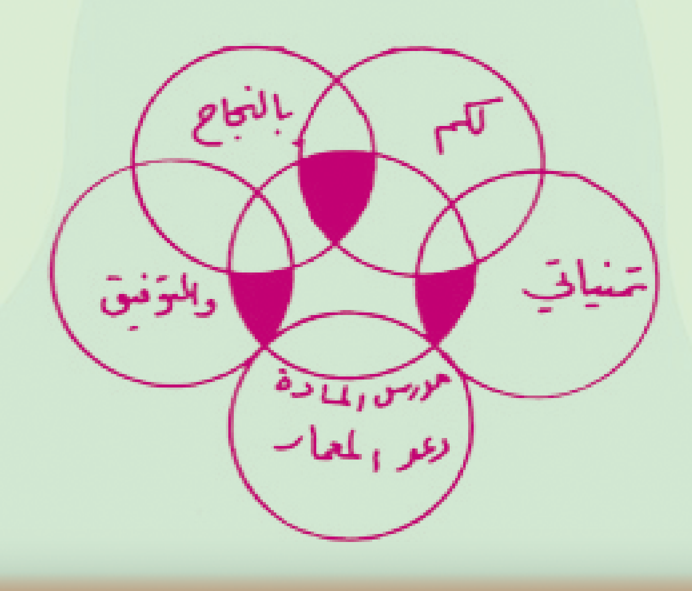
$$\therefore m\angle DHB = 45^\circ$$

(وهو المطلوب)

الفصل التاسع
chapter 9

Counting , Permutation and Combination مبدأ العد والتباديل والتوافيق

المصطلح	الرمز أو العلاقة الرياضية
رمز مضروب العدد n	$n! = n(n-1)(n-2) \times \dots \times 2 \times 1$
التباديل	$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$
التوافيق	$C_r^n = \frac{P_r^n}{r!} = \frac{n!}{(n-r)! \times r!}$
نسبة الاحتمال	$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$
مبرهنة ذات الحدين	$(a+b)^n$
قانون الحد العام	$P_r = C_{r-1}^n \, a^{n-r+1} \, b^{r-1}$



مبدأ العد : Counting Method

اذا أمكن اجراء عملية بأحدى الطرق المختلفة عددها m وكان لدينا في الوقت نفسه عملية أخرى يمكن اجراؤها بطرق عددها n فأن عدد الطرق التي يمكن بها اجراء العمليتين معاً يساوي $m \times n$ طريقة .

مثال معرض لبيع الدراجات الهوائية يحتوي على 5 انواع من الدراجات وكل نوع بثلاث احجام وكل حجم بأربعة الوان فما عدد الدراجات في المعرض ؟

الحل/ ليكن n_1 يمثل انواع الدراجات

وليكن n_2 يمثل احجام الدراجات

و n_3 يمثل الوان الدراجات

$\therefore n_1 \times n_2 \times n_3 =$ عدد الدراجات

$\therefore 5 \times 3 \times 4 = 60$ دراجة

مثال كم عدد رمزه مكون من ثلاث مراتب يمكن تكوينه من مجموعة الارقام $\{1, 2, 5, 7, 8, 9\}$ حيث: أ) التكرار مسموح في العدد نفسه ب) التكرار غير مسموح

الحل/ أ- التكرار مسموح عدد اختيارات رتبة المئات = 6

رتبة العشرات = 6

رتبة الاحاد = 6

$\therefore 6 \times 6 \times 6 = 216$ عدد الاعداد

ب- التكرار غير مسموح عدد اختيار رتبة المئات : 6

رتبة العشرات : 5

رتبة الاحاد = 4

$\therefore 6 \times 5 \times 4 = 120$ عدد الاعداد

مثال كم عدد رمزه يتكون من ثلاث مراتب يمكن تكوينه من مجموعة الارقام $\{1, 2, 5, 7, 8, 9\}$ حيث أ) تكرار الرقم في العدد نفسه مسموح ب) تكرار الرقم غير مسموح

الحل/ أ) عدد طرق اختيار رتبة الاحاد = 6

رتبة العشرات = 6

رتبة المئات = 6

$\therefore$ عدد الاعداد $= 6 \times 6 \times 6 = 216$ عدداً

	احاد	عشرات	مئات
حالة أ	6	6	6
حالة ب	6	5	4

ب) عدد طرق اختيار رتبة الاحاد = 6

عدد طرق اختيار رتبة العشرات: 5

رتبة المئات: 4

∴ عدد الاعداد = $6 \times 5 \times 4 = 120$ عدداً

مثال: كم عدداً رمزه مكون من ثلاث ارقام يمكن تكوينه من مجموعة الارقام $\{1, 3, 5, 6, 7, 8, 9\}$ واكبر من 500 اذا كان:

أ) تكرار الرقم في العدد نفسه مسموح ب) تكرار الرقم غير مسموح

الحل/ أ) عدد طرق اختيار رتبة المئات = 5

رتبة العشرات = 7

رتبة الآحاد = 7

عدد الاعداد = $5 \times 7 \times 7 = 245$ عدداً

	مئات	عشرات	آحاد
أ	5	7	7
	5	6	5

ب) عدد طرق اختيار رتبة المئات = 5

رتبة العشرات = 6

رتبة الاحاد = 5

عدد الاعداد = $5 \times 6 \times 5 = 150$ عدداً

ملاحظة: لا يمكن اختيار رتبة المئات رقم اصغر من 5 لان العدد اكبر من 500

مثال: نفس المثال السابق لو كان العدد أصغر من 500 فان:

أ) عدد طرق اختيار رتبة المئات: 2 (يجب ان يكون العدد رقم اصغر من 5) (وفي المجموعة يوجد رقمان فقط)

" " " رتبة العشرات: 7

رتبة الاحاد: 7

عدد الاعداد = $2 \times 7 \times 7 = 98$ عدداً.

ب) عدد طرق اختيار رتبة المئات = 2

رتبة العشرات: 6

رتبة الاحاد = 5

∴ عدد الاعداد = $2 \times 6 \times 5 = 60$ عدداً

مضروب العدد : اذا ضربت العدد n في الاعداد التي تقل واحد عن الآخر الى العدد (1) تكتب بالشكل :

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1 = n!$$

$n!$ تقرأ (مضروب العدد n) شرط n عدد صحيح موجب

$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ (تقرأ مضروب العدد 5)

$8! = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ (تقرأ مضروب 8)

وهكذا . . .

مثال جد $6!$ ، $1!$ ، $0!$

الحل/

$6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$

$1! = 1$

$0! = 1$ لإثبات ذلك

$n! = n(n-1)!$

نفرض $n=1$ فان

$1! = 1(1-1)!$

$1! = 1 \cdot 0!$

$\therefore 0! = 1! = 1$

مثال اذا كانت $\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = 30$ جد (n)

الحل/

$$\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = 30$$

$$\frac{(n+1) \cdot n \cdot (n-1)!}{(n-1)!} = 30 \Rightarrow \frac{n(n+1)}{1} = 30$$

$$n^2 + n = 30 \Rightarrow n^2 + n - 30 = 0 \Rightarrow (n+6)(n-5) = 0$$

either $n + 6 = 0 \Rightarrow n = -6$ يهمل.

or $n - 5 = 0 \Rightarrow n = 5$

مثال اذا كانت $n! = 5040$ جد قيمة n

الحل/

$n! = 5040$

$n! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 7!$

$\therefore n = 7$

5040	1
5040	2
2520	3
840	4
210	5
42	6
7	7
1	

التباديل : permutation

التباديل هو ترتيب معين ممكن تكوينه من مجموعة من الأشياء n بأخذها كلها أو بعضها مثل r حيث $r<n$ ويرمز للتباديل بالشكل P_r^n أو $p(n,r)$.

قوانين التباديل :

① $P_r^n = p(n,r) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$

② $P_n^n = p(n,n) = n(n-1)(n-2)\cdots\times 3\times 2\times 1$ $\quad n=r$

$= n!$

③ $P_r^n = \dfrac{n!}{(n-r)!}$ قانون التباديل

④ $P_0^n = p(n,0) = 1$ $\quad r=0$

⑤ $P_1^n = \dfrac{n!}{(n-1)!} = \dfrac{n(n-1)!}{(n-1)!} = n$ $\quad r=1$

أمثلة : احسب كل مما يأتي :

① $P_3^8 = \dfrac{8!}{(8-3)!} = \dfrac{8!}{5!} = \dfrac{8\times 7\times 6\times 5!}{5!} = 336$

ويمكن الحل مباشرة $P_3^8 = 8\times 7\times 6 = 336$

② $P_4^4 = 4! = 4\times 3\times 2\times 1 = 24$

او بالطريقة $P_4^4 = \dfrac{4!}{(4-4)!} = \dfrac{4!}{0!} = \dfrac{4!}{1} = 4!$

③ $P_0^5 = 1$

ويمكن توضيح ذلك $= \dfrac{5!}{(5-0)!} = \dfrac{5!}{5!} = 1$

مثال : جد عدد التباديل للحروف م ، ب ، جـ المأخوذة منها اثنين في كل مرة :

$P_2^3 = 3\times 2 = 6$

مثال : ما عدد طرق توزيع (4) أربعة اشخاص على (4) وظائف شاغرة بحيث كل شخص له فرصة عمل متساوية مع الآخرين بكل فرصة

$P_4^4 = 4! = 4\times 3\times 2\times 1 = 24$

مثال: بكم طريقة يمكن لمجموعة من سبعة اشخاص في حفل ان يرتبوا انفسهم بحيث يجلسون في صف مستقيم به سبعة مقاعد؟

الحل/ عدد الطرق $P_7^7 = 7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5040$

مثال: جد قيمة n اذا كان $P_2^n = 90$

الحل/

$$P_2^n = 90 \Rightarrow \frac{n!}{(n-2)!} = 90$$

$$\therefore \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} = 90 \Rightarrow n(n-1) = 90$$

$$\therefore n^2 - n - 90 = 0 \Rightarrow (n-10)(n+9) = 0$$

either $n-10=0 \Rightarrow n=10$ or $n+9=0 \Rightarrow n=-9$ يهمل

التوافيق: Combination

هو كل مجموعة يمكن تكوينها من مجموعة من الاشياء (n) مأخوذة كلها أو بعضها (r) حيث $r \leq n$ بغض النظر عن ترتيبها. ويرمز لها بالشكل:

$$C_r^n = \binom{n}{r} = C(n,r)$$

قوانين التوافيق:

① $C_r^n = \dfrac{P_r^n}{r!} = \dfrac{\frac{n!}{(n-r)!}}{r!}$

② $C_r^n = \dfrac{n!}{(n-r)!\, r!}$

③ $C_r^n = C_{n-r}^n$ مثل $C_{15}^{20} = C_5^{20}$

④ $C_n^n = C_0^n = 1$

مثال: احسب كل من

① $C_2^5 = \dfrac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$

② $C_3^8 = \dfrac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} = 56$

③ $C_1^5 = 5$, $C_0^5 = 1$, $C_5^5 = 1$

مثال كم لجنة ثلاثية يمكن تكوينها من (6) أشخاص

الحل/ $C^6_3 = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 20$ لجنة

مثال اذا كان عدد أسئلة امتحان مادة الرياضيات هو (8) أسئلة والمطلوب حل (5) أسئلة فقط . بكم طريقة يمكن الإجابة عليها ؟

الحل/ $C^8_5 = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 56$

مثال اذا كان عدد اسئلة امتحان ما هو 8 اسئلة وكان المطلوب حل 5 أسئلة منها فقط بشرط ان تكون ثلاثة منها من الاربعة الاولى منها . فبكم طريقة يمكن الاجابة ؟

الحل/ لتكن n_1 = عدد طرق الاجابة عن ثلاثة اسئلة من الاربعة الاولى = C^4_3

$C^4_3 = \frac{4 \times 3 \times 2}{3 \times 2 \times 1} = 4$

ولتكن n_2 = عدد طرق الاجابة من سؤالين من الاربعة الثانية = C^4_2

$C^4_2 = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} = 6$

∴ عدد طرق الاجابة = $n_1 \times n_2 = 4 \times 6 = 24$ طريقة .

ويمكن الحل بشكل مباشر :

$C^4_3 \times C^4_2 = \frac{4 \times 3 \times 2}{3 \times 2 \times 1} \times \frac{4 \times 3}{2 \times 1} = 48$ طريقة للحل

مثال بكم طريقة يمكن اختيار لجنة من ثلاثة رجال وسيدتين من بين (7) رجال و(5) سيدات .

الحل/ يمكن اختيار 3 رجال من بين 7 رجال بطرق = C^7_3

ويمكن اختيار 2 سيدة من بين 5 سيدات بطرق = C^5_2

∴ $C^7_3 \times C^5_2 = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} \times \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 350$ عدد الطرق

مثال/ كيس فيه (10) كرات حمراء و (6) كرات بيضاء سحبت منه (4) كرات معاً دون ارجاع. ما عدد الطرق التي تكون فيها الكرات المسحوبة من نفس اللون

الحل/ عندما يذكر من نفس اللون يعني إما 4 حمراء أو 4 بيضاء ويكون الحل بالشكل:

$$C^{10}_4 + C^6_4 = \frac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2\times1} + \frac{6\times5\times4\times3}{4\times3\times2\times1} = 210 + 15 = 225 \text{ طريقة}$$

مثال/ أثبت أن:

$$\binom{70}{5} = \binom{70}{65}$$

الحل/ قانون الثالث

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

$$\therefore \binom{70}{5} = \binom{70}{70-5} = \binom{70}{65}$$

مثال/ جد قيمة n اذا كان $C^n_2 = 55$

$$C^n_2 = 55 \Rightarrow \frac{n(n-1)}{2\times1} = 55$$

$$\therefore n(n-1) = 110 \rightarrow n^2 - n - 110 = 0 \rightarrow (n-11)(n+10) = 110$$

$$\text{either } n-11=0 \rightarrow n=11 \quad \text{or } n+10=0 \rightarrow n=-10 \text{ يهمل}$$

> عدد طرق سحب عينة عناصرها (r) من مجموعة عدد عناصرها (n)
>
> حيث $n \geq 1$ ، $n \in N^+$ ، $r \leq n$

ملاحظة: عند السحب يجب مراعاة الآتي:

① السحب بالارجاع يعني ان كل عينة تسحب تعاد الى المجموعة الاصلية قبل الشروع بسحب عينة أخرى

② السحب بدون ارجاع يعني ان كل عينة تسحب لا تعاد الى المجموعة الأصلية. والمخطط التالي يوضح عملية السحب

(عدد طرق سحب عينة (r) من مجموعة (n))

- بالارجاع
  - بالترتيب: عدد الطرق $= n^r$
  - بدون ترتيب: عدد الطرق $= C^{n+r-1}_r$
- بدون ارجاع
  - بالترتيب: عدد الطرق $= P^n_r$ (تباديل)
  - بدون ترتيب: عدد الطرق $= C^n_r$ (توافيق)

مثال بكم طريقة يمكن سحب (3) كرات من وعاء فيه (7) كرات

① مع الارجاع ومراعاة الترتيب : عدد الطرق $n^r = 7^3 = 343$

② مع الارجاع دون مراعاة الترتيب : $C_r^{n+r-1} = C_3^{7+3-1} = C_3^9$

$$= \frac{9\times8\times7}{3\times2\times1} = 84$$ عدد الطرق

③ بدون ارجاع مع مراعاة الترتيب $P_3^7 = 7\times6\times5 = 210$ طريقة

④ بدون ارجاع وعدم مراعاة الترتيب $C_3^7 = \frac{7\times6\times5}{3\times2\times1} = 35$ طريقة

ملاحظة : اذا لم تذكر طريقة السحب نعتبر بدون ارجاع مع عدم مراعاة الترتيب (توافيق)

تمارين (1 - 9)

① في معرض للسيارات توجد (5) انواع من السيارات ومن كل نوع (3) نماذج ومن كل نموذج توجد (4) سيارات فما عدد السيارات في المعرض ؟

الحل/ $5\times3\times4 = 60$ سيارة

---

② كم عدد زوجي يمكن تكوينه من اربعة مراتب مأخوذة من الارقام التالية : {5, 1, 6, 2, 7, 4, 8} حيث ⓐ التكرار مسموح في العدد نفسه ⓑ التكرار غير مسموح

الحل/ ⓐ عدد طرق اختيار رتبة الاحاد = 4 (الاحاد عدد زوجي)

رتبة العشرات = 7

رتبة المئات = 7

رتبة الالوف = 7

∴ عدد الاعداد = $4\times7\times7\times7 = 1372$ عدداً

ⓑ عدد طرق اختيار رتبة الاحاد = 4

رتبة العشرات = 6

رتبة المئات = 5

رتبة الالوف = 4

∴ عدد الاعداد = $4\times6\times5\times4 = 480$ عدداً

③ صندوق يحتوي على عشرة مصابيح (4) منها عاطلة سحبت ثلاثة منها جد عدد طرق سحب ⓐ اثنان صالحة وواحد عاطل ⓑ على الاقل مصباح صالح

الحل / ⓐ

$10-4=6$ مصابيح صالحة

$C_2^6 \times C_1^4 = \frac{6\times5}{2\times1} \times \frac{4}{1} = 60$ طريقة للسحب

ⓑ

$C_1^6 \times C_2^4 + C_2^6 \times C_1^4 + C_3^6 \times C_0^4 =$

$\frac{6}{1} \times \frac{4\times3}{2\times1} + \frac{6\times5}{2\times1} \times \frac{4}{1} + \frac{6\times5\times4}{3\times2\times1} \times 1 = 116$ طريقة للسحب

---

④ اذا كان عدد أسئلة امتحان مادة ما هو (8) أسئلة وكان المطلوب حل خمسة اسئلة منها فقط بشرط ان تكون ثلاثة منها من الاسئلة الاربعة الاولى فبكم طريقة يمكن الاجابة ؟

الحل / محلول ضمن الأسئلة .

---

⑤ ما عدد الطرق لاختيار فريق الكرة الطائرة من (6) لاعبين من بين (11) لاعب [الاختيار دون ارجاع وعدم اعتبار الترتيب]

الحل /

$C_6^{11} = \frac{11\times10\times9\times8\times7\times6}{6\times5\times4\times3\times2\times1} = 462$ طريقة

---

⑥ كم طريقة يمكن اختيار لجنة مؤلفة من خمسة أشخاص على شرط ان تحتوي على (3) طلاب و (2) طالبة من بين (7) طلاب و (6) طالبات

ⓐ استبعاد أحد الطلاب من اللجنة ⓑ احدى الطالبات لا يحق لها المشاركة في اللجنة

الحل / ⓐ اذا استبعد احد الطلاب من اللجنة فيبقى 6 طلاب ويتم اختيار 3 طلاب من 6 طلاب لذلك:

$C_3^6 \times C_2^6 = \frac{6\times5\times4}{3\times2\times1} \times \frac{6\times5}{2\times1} = 300$ طريقة للاختيار

ⓑ اذا استبعدت احدى الطالبات تبقى 5 طالبات ويتم اختيار 2 من 5 لذلك

$C_3^7 \times C_2^5 = \frac{7\times6\times5}{3\times2\times1} \times \frac{5\times4}{2\times1}$

$= 35 \times 10 = 350$ طريقة للاختيار

⑦ جد قيمة n اذا كان

① $P_2^n = 72$

$n(n-1) = 72 \Rightarrow n^2 - n - 72 = 0$

$\therefore (n-9)(n+8) = 0$

either $n - 9 = 0 \Rightarrow n = 9$ or $n + 8 = 0 \Rightarrow n = -8$ يهمل.

② $\binom{n}{2} = 10$

$\frac{n(n-1)}{2 \times 1} = 10 \Rightarrow n^2 - n = 20 \Rightarrow n^2 - n - 20 = 0$

$\therefore (n-5)(n+4) = 0$

either $n - 5 = 0 \Rightarrow n = 5$ or $n + 4 = 0 \Rightarrow n = -4$ يهمل

③ $2\binom{n}{2} = \binom{n+1}{3}$

$2 \times \frac{n(n-1)}{2 \times 1} = \frac{(n+1)n(n-1)}{3 \times 2 \times 1} \Rightarrow 1 = \frac{n+1}{6}$

$\therefore n + 1 = 6 \Rightarrow n = 6 - 1 = 5$

---

⑧ كم عدد رمزه مكون من ثلاث مراتب وأصغر من 600 يمكن تكوينه من الارقام {9 ، 7 ، 2 ، 6 ، 3 ، 5}

أ) يسمح تكرار الرقم في العدد نفسه

الحل/ عدد طرق اختيار رتبة المئات = 3 (لان العدد اصغر من 600)

رتبة العشرات = 6

رتبة الاحاد = 6

$\therefore$ عدد الاعداد = $3 \times 6 \times 6 = 108$ عدداً

ب) لا يسمح تكرار الرقم في العدد نفسه.

عدد طرق اختيار رتبة المئات = 3

رتبة العشرات = 5

رتبة الاحاد = 4

$\therefore$ عدد الاعداد = $3 \times 5 \times 4 = 60$ عدداً

ج) العدد زوجي ولا يسمح بتكرار الرقم في العدد نفسه.

الحل/ عدد طرق اختيار رتبة الاحاد = 2

رتبة العشرات = 5

رتبة المئات = 3 (اذا كان الاحاد 6) او = 2 (اذا كان الاحاد 2)

∴ عدد الاعداد = $3 \times 5 \times 2 = 30$ عدداً . الحالة الاولى .

عدد الاعداد = $2 \times 5 \times 2 = 20$ عدداً الحالة الثانية .

---

9) اذا كان $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ فكم عدد رمزه تكون من (5) ارقام مختلفة يمكن تكوينه من عناصر X ؟

الحل/ بما ان الارقام مختلفة (يعني بدون ارجاع) ولانه عدد فالمطلوب يكون بترتيب .

∴ عدد الاعداد $P_5^9 = 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 15120$

الاحتمال: Probability

بعض المفاهيم الاساسية

1) التجربة (Experiment) وهي القيام بفعل معين ثم ملاحظة جميع ماينتج عن هذا الفعل .

2) التجربة العشوائية (Random Experiment) وهي التجربة التي تحقق الشرطين التاليين :

أ) يمكن لنا ان نصف جميع نواتج التجربة قبل وقوعها .

ب) لا يمكن تحديد أي من النواتج ، يمكن ان يتحقق فعلاً في حالة حدوث التجربة .

مثال عند رمي حجر النرد (Dice) مرة واحدة وملاحظة الوجه الظاهر نعلم مسبقاً ان الوجه الظاهري في الرمية سيكون أحد الارقام التالية 6 ,5 ,4 ,3 ,2 ,1 اي يمكن تحديد جميع النواتج الممكنة لكن من غير الممكن تحديد النتيجة بعينها لذا سميت هذه التجربة العشوائية .

فضاء العينة : Sample Space

فضاء العينة في تجربة عشوائية هو جميع النتائج الممكنة لهذه التجربة ويرمز لها بالرمز S .

وعدد عناصر فضاء العينة نرمز له بالرمز $n(S)$

ففي المثال السابق فضاء العينة: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

وعدد عناصر فضاء العينة : $n(S) = 6$

الحدث : Event

هو مجموعة جزئية من فضاء العينة ، A حدث من فضاء العينة S حيث $A \subseteq S$.

الاحداث الشاملة: لتكن A ، B ، C أحداث من فضاء العينة S يقال لهذه الاحداث شاملة اذا حققت الشروط التالية :

① اتحاد الاحداث = S فضاء العينة .

② تقاطعها مثنى مثنى (كل اثنين معاً) = Φ

③ كل مجموعة منها ليست خالية .

مثال ليكن $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ نأخذ بعض الاحداث من S

$A_1 = \{4, 1\}$ يسمى حدث مركب (Compound event) لاحتوائه اكثر من عنصر واحد

$A_2 = \{2\}$ يسمى حدث بسيط (Simple event) لاحتوائه على عنصر واحد

$A_3 = \{6\}$ حدث بسيط

$A_4 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ حدث مركب .

$A_5 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ يسمى حدث مؤكد (Sure event) لانه عدد عناصره = عدد عناصر S .

$A_6 = \{6, 5, 3, 2\}$ حدث مركب

A_7 = عدد يقبل القسمة على 2, 5 في نفس الوقت ← $A_7 = \Phi$ يسمى حدث مستحيل اي لايمكن وقوعه (Impossible event)

نلاحظ A_1 ، A_6 احداث شاملة من S

العمليات على الحوادث :

① $A \subseteq S$ معناه A حدث من S

② Φ نسمي بالحدث المستحيل (الحدث الذي لايمكن وقوعه)

③ S فضاء العينة = الحدث المؤكد « يقع دائماً »

④ $A^c = S - A$ ويسمى الحدث المكمل للحدث A (أو عدم وقوع الحدث A)

A^c = Complement event

⑤ $B \cup A$ يعني حدث وقوع أي حدث وقوع أحدهما على الأقل A أو B

⑥ $B \cap A$ يعني حدث وقوع الحدث A و B معاً .

⑦ $A \subseteq B$ يعني حدث وقوع الحدث A يجب وقوع الحدث B .

⑧ $A \cap B = \Phi \Longleftrightarrow A , B$ حدثين متنافيين Mutually Exclusive events

⑨ الحدث الذي يتكون من عنصر واحد يسمى حدثاً بسيطاً

⑩ الحدث الذي يتكون من عنصرين أو أكثر يسمى حدثاً مركباً .

ملاحظة: اذا كانت تجربة مركبة من تجربتين متتاليتين وكان فضاء العينة الأولى S_1 وفضاء العينة الثانية S_2 فان :

① فضاء العينة للتجربة المركبة = $S_1 \times S_2$ (حاصل ضرب ديكارتي)

② $n(S_1) \times n(S_2) = n(S)$ مبدأ العد لعدد عناصر فضاء العينة .

~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

مثال التجربة : القاء حجر نرد مرة واحدة ثم قطعة نقود ثم حجر نرد مرة أخرى فالتجربة مركبة من ثلاث تجارب متتالية الوقوع

الحل

$S_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ حجر النرد الأول

$S_2 = \{H, T\}$ H صورة ، T كتابة .

$S_3 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ حجر النرد الثاني

$\therefore S = S_1 \times S_2 \times S_3 \Rightarrow n(S) = n(S_1) \times n(S_2) \times n(S_3)$

$= 6 \times 2 \times 6 = 72$ عنصراً

وتكون العناصر ثلاثية مرتبة .

$S = \{(1, H, 1), (1, H, 2), (1, H, 3) \text{ ----- } (6, T, 6)\}$
~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

تمارين (2 - 9)

① رمينا حجرين نرد جد :

أ) عدد عناصر فضاء العينة :

$n(S) = n(S_1) \times n(S_2)$

$= 6 \times 6 = 36$

ب) اكتب فضاء العينة S :

$S_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $S_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$\therefore S = S_1 \times S_2 = \{(x, y) : x \in S_1 , y \in S_2\}$

$= \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4) \ldots \ldots (6,6)\}$

ج) اكتب الحدث الذي فيه مجموع العددين على وجهي الحجرين اكبر من او يساوي 9 .

$A_1 = \{(4,5), (5,4), (3,6), (6,3), (6,4), (4,6), (5,6), (6,5), (6,6), (5,5)\}$

د) اكتب الحدث الذي فيه مجموع العددين على وجهي الحجرين يقبل القسمة على 6 بدون باق

$A_2 = \{(3,3), (4,2), (2,4), (5,1), (1,5), (6,6)\}$

هـ) اكتب الحدث الذي فيه العدد الذي على وجه احد الحجرين ضعف العدد الذي على وجه الحجر الآخر .

$A_3 = \{(1,2), (2,1), (4,2), (2,4), (6,3), (3,6)\}$

② عند رمي حجر نرد مرة واحدة اكتب الاحداث التالية ثم بين اي الحدثين متنافيين

أ) الحدث ظهور عدد اولي :

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$A_1 = \{2, 3, 5\}$

ب) الحدث ظهور عدد زوجي :

$A_2 = \{2, 4, 6\}$

ج) الحدث ظهور عدد فردي :

$A_3 = \{1, 3, 5\}$

$A_2 \cap A_3 = \Phi \Leftarrow A_2 , A_3$ حدثين متنافيين .

---

③ رمية ثلاث قطع نقود معدنية مرة واحدة أ) صف فضاء العينة

ب) جد الحدث وجه واحد على الاقل صورة (H) ج) ظهور الحدث وجه واحد على الاكثر كتابة (T) .

الحل/

أ) $S = \{(H,H,H), (H,H,T), (H,T,H), (H,T,T), (T,H,H), (T,H,T), (T,T,H), (T,T,T)\}$

ب) $A_1 = \{(H,H,H), (H,H,T), (H,T,H), (H,T,T), (T,H,H), (T,H,T), (T,T,H)\}$

ج) $A_2 = \{(H,H,T), (H,T,H), (T,H,H), (H,H,H)\}$

نسبة الاحتمال : Probability

تعريف: ليكن A حدث من S حيث S فضاء العينة ذي احتمالات متساوية يسمى فضاء منتظم.

الاحتمال P ويرمز نسبة احتمال حدوث الحدث A = $\frac{\text{عدد عناصر } A}{\text{عدد عناصر } S}$

$$\therefore P(A) = \frac{n(A)}{n(P)}$$

قوانين نسبة الاحتمال:

① $0 \le P(A) \le 1$ حيث

$P(A) = 0$ اذا كان A حدثاً مستحيلاً ، $P(A) = 1$ اذا كان A حدثاً مؤكداً

اي ان نسبة احتمال وقوع الحدث تنتمي للفترة المغلقة $[0, 1]$

② $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ حدثاً مستقلان

(اي احتمال حدوث اي منها لا يشترط حدوث الآخر)

③ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

اذا كان $A \cap B = \phi$ فان: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$P(A) + P(A^c) = 1$ أي $P(A^c) = 1 - P(A)$

مثال: أقراص مرقمة من 10 الى 21 سحب منها قرص واحد جد نسبة احتمال ان هذا القرص يحمل عدداً زوجياً أو يقبل القسمة على 3 بدون باقي.

الحل/

$S = \{10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21\}$

$n(S) = 21 - 10 + 1 = 12$ أو يمكن عدها

ليكن A حدث مجموعة الاعداد الزوجية $n(A) = 6$

$$\therefore P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{12}$$

ليكن B حدث مجموعة الاعداد التي تقبل القسمة على 3 . $n(B) = 4$

$$p(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{4}{12}$$

$$A \cap B = \{12, 18\}$$

$$p(A \cap B) = \frac{2}{12}$$

$$\therefore p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

$$= \frac{6}{12} + \frac{4}{12} - \frac{2}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

مثال شركة افرادها هم (60) رجلاً و (20) أمرأة، من الرجال (35) رجل متزوج ومن النساء، (12) أمرأة متزوجة. من هذه الشركة أختير عشوائياً جد احتمال ان يكون ① هذا الشخص رجل ② هذا الشخص أمرأة غير متزوجة.

الحل/ ① ليكن A الحدث ((الشخص رجل))

$$n(S) = 60 + 20 = 80$$

$$p(A) = \frac{60}{80} = \frac{3}{4}$$

② ليكن B الحدث ((الشخص امرأة غير متزوجة))

$$p(B) = \frac{20-12}{80} = \frac{8}{80} = \frac{1}{10}$$

مثال ألقينا حجري نرد متمايزين مرة واحدة جد احتمال ان يكون مجموع العددين على الوجهين الظاهرين يساوي (10) أو مجموع العددين على الوجهين الظاهرين (9).

الحل/

$$n(S) = 6 \times 6 = 36$$

ليكن A الحدث: مجموع العددين على الوجهين الظاهرين $= 10$

$$A = \{(5,5), (6,4), (4,6)\} \Rightarrow n(A) = 3$$

$$\therefore p(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{36}$$

ليكن B الحدث: مجموع العددين على الوجهين الظاهرين $= 9$

$$B = \{(3,6), (6,3), (4,5), (5,4)\} \Rightarrow n(B) = 4$$

$$p(B) = \frac{4}{36} \qquad A \cap B = \phi \Rightarrow p(A \cap B) = 0$$

$$\therefore p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

$$= \frac{3}{36} + \frac{4}{36} = \frac{7}{36}$$

مثال رمينا حجري نرد متمايزين من احجار النرد مرة واحدة. ما احتمال أن يكون العدد على وجه احد الحجرين هو ضعف العدد على الوجه الآخر أو العددين على الوجهين الظاهرين مجموعهما (6).

الحل/ ليكن A = الحدث : الحصول على الوجه الظاهري لأحد الحجرين ضعف العدد على الوجه الآخر

$A = \{(2,1),(1,2),(2,4),(4,2),(3,6),(6,3)\}$

$n(A) = 6$

$\therefore p(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{36}$

ليكن B = الحدث : مجموع الوجهين الظاهرين = 6

$B = \{(1,5),(5,1),(2,4),(4,2),(3,3)\} \Rightarrow n(B) = 5$

$p(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{5}{36}$

$A \cap B = \{(2,4),(4,2)\} \Rightarrow n(A \cap B) = 2$

$\therefore p(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{2}{36}$

$\therefore p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

$= \frac{6}{36} + \frac{5}{36} - \frac{2}{36} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$

مثال/ ليكن احتمال نجاح طالب في امتحان مادة الرياضيات هو 90% وليكن احتمال نجاح طالب آخر في الرياضيات 70% فما نسبة احتمال نجاحهما معاً في مادة الرياضيات .

الحل/ ليكن $p(A)$ نسبة احتمال نجاح طالب الأول في الرياضيات : $p(A) = 0.90$

وليكن $p(B)$ نسبة احتمال نجاح طالب آخر في الرياضيات : $\therefore p(B) = 0.70$

من الواضح ان A,B حدثين مستقلين (لان نجاح احدهما لا يتأثر بنجاح الآخر)

$\therefore p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$

$= 0.90 \times 0.70 = 0.63$

مثال/ صندوق يحتوي على (8) أقراص ، (4) أقراص حمراء ، (3) اقراص خضراء سحبنا (3) اقراص مرة واحدة جد نسبة احتمال الاقراص المسحوبة من نفس اللون .

الحل/

$n = 8 + 4 + 3 = 15 \qquad r = 3$

$P = \frac{C_3^8 + C_3^4 + C_3^3}{C_3^{15}} = \frac{61}{455}$ بعد الاختصار والتبسيط

مثال/ يراد تكوين لجنة من 5 أشخاص من بين 8 طلاب و 6 طالبات

1) جد نسبة احتمال اللجنة جميعها من الطلاب .

2) جد نسبة احتمال اللجنة جميعها من الطالبات .

الحل/ 1) $8+6=14$ مجموع الطلاب والطالبات ⇐ $n(S) = C^{14}_{5}$

نفرض نسبة احتمال اللجنة جميعها طلاب $p(A)$ ⇐ $p(A)=\frac{C^{8}_{5}}{C^{14}_{5}}=\frac{4}{143}$

2) نفرض نسبة احتمال اللجنة جميعها طالبات $p(B)$ ⇐ $p(B)=\frac{C^{6}_{5}}{C^{14}_{5}}=\frac{3}{1001}$

تمارين (3 - 9)

1) صندوق يحتوي على ثلاث كرات بيضاء مرقمة 1 ، 2 ، 3 وكرتين سوداوتين مرقمتين 1 ، 2 . اذا علمت ان الكرات متماثلة بالحجم سحبت كرة واحدة جد احتمال 1) الكرة سوداء 2) الكرة بيضاء 3) الكرة بيضاء وتحمل رقم فردي .

الحل/ 1) ليكن A الحدث سحب كرة سوداء

$n(S)= 3+2=5$

$p(A)=\frac{C^{2}_{1}}{C^{5}_{1}}=\frac{2}{5}$

2) ليكن B الحدث سحب كرة بيضاء

$p(B)=\frac{C^{3}_{1}}{C^{5}_{1}}=\frac{3}{5}$

3) ليكن C الحدث سحب كرة بيضاء تحمل رقم فردي

$p(C)=\frac{C^{2}_{1}}{C^{5}_{1}}=\frac{2}{5}$

2) رمينا حجرين متمايزين من أحجار النرد

أ) ما هو احتمال العددين الظاهرين اللذين مجموعهما (6)

ب) ما هو احتمال الحصول على مجموع (7) أو مجموع (11)

الحل/ ليكن A حدث احتمال مجموع العددين (6)

$n(S)= 6\times 6=36$

$A=\{(1,5),(5,1),(2,4),(4,2),(3,3)\} \Rightarrow n(A)=5$

$p(A)=\frac{5}{36}$

ب) نفرض B حدث الحصول على مجموع (7)

$B=\{(1,6),(6,1),(2,5),(5,2),(3,4),(4,3)\} \rightarrow n(B)=6$

نفرض C حدث الحصول على مجموع 11

$C = \{(5,6),(6,5)\}$

$\therefore n(C) = 2$

$A \cap C = \phi$ حدثان منفصلان

$P(C) = \frac{2}{36}$

$$\therefore P(B \cup C) = P(B) + P(C) = \frac{6}{36} + \frac{2}{36} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$$

---

③ صندوقان يحتوي كل منهما على (6) كرات بيضاء و(4) كرات حمراء. جد نسبة احتمال سحب 3 كرات بيضاء من الصندوق الاول، وسحب كرتين بيضاويتين وكرة حمراء من الصندوق الثاني.

الحل/ عدد الكرات في الصندوقين $6 + 4 = 10$

لتكن A حدث سحب (3) كرات بيضاء من الصندوق الاول

$$P(A) = \frac{C_3^6}{C_3^{10}} = \frac{1}{6}$$

ونفرض B حدث سحب كرتين بيضاويتين وكرة حمراء من الصندوق الثاني

$$P(B) = \frac{C_2^6 \times C_1^4}{C_3^{10}} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore P(A \cap B) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$$

---

④ لدينا (5) بطاقات مرقمة من 1 الى 5 سحبت بطاقة واحدة جد نسبة احتمال البطاقة لا تحمل رقم 3.

الحل/ نفرض A حدث ظهور البطاقة تحمل رقم 3

$$\therefore P(A) = \frac{C_1^1}{C_1^5} = \frac{1}{5}$$

$$P(A^c) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

حل آخر: نسحب (3) من الارقام فا

الارقام المتبقية $5 - 1 = 4$

B حدث عدم ظهور رقم (3)

$$\therefore P(B) = \frac{C_1^4}{C_1^5} = \frac{4}{5}$$

⑤ كيس يحتوي على (20) كرة متجانسة في جميع عناصرها مرقمة من 1، ... ، 20
سحبت كرة واحدة ، جد:
ⓐ احتمال العدد الذي تحمله الكرة عدداً أصغر من (9)
ⓑ احتمال العدد الذي تحمله الكرة عدداً أكبر من (5)

الحل/ ⓐ نفرض A حدث احتمال العدد الذي تحمله الكرة عدداً أصغر من (9)

$$\therefore P(A) = \frac{C_1^8}{C_1^{20}} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$$ أي من 1 ... 8

ⓑ نفرض B حدث احتمال العدد الذي تحمله الكرة عدداً أكبر من (5)

$$P(B) = \frac{C_1^{15}}{C_1^{20}} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$$ أي من 6 ... 20

---

⑥ صندوق يحتوي على 21 قرص مرقم من 1، ... ، 21 سحب قرصان جد نسبة احتمال ⓐ القرصان زوجيان . ⓑ الاول زوجي والثاني فردي

الحل/ ⓐ عدد الاقراص الزوجية = 10

$$P(A) = \frac{C_2^{10}}{C_2^{21}} = \frac{10 \times 9}{21 \times 20} = \frac{3}{14}$$

ⓑ الاول زوجي والثاني فردي

$$P(B) = \frac{C_1^{10} \times C_1^{11}}{C_2^{21}} = \frac{10 \times 11}{\frac{21 \times 20}{2 \times 1}}$$

$$= \frac{10 \times 11}{21 \times 10} = \frac{11}{21}$$

ملاحظة: اختصار التوافيق على الطالب

---

⑦ لدينا 50 بطاقة مرقمة من 1 الى 50 جد احتمال العدد على البطاقة المسحوبة:
ⓐ يقبل القسمة على 5 ⓑ يقبل القسمة على 7 ⓒ يقبل القسمة على 5 أو 7

الحل/ ⓐ A حدث ان يقبل القسمة على 5

$A = \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50\}$

$n(A) = 10 \quad , n(S) = 50$

$$\therefore P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{10}{50} = \frac{1}{5}$$

ⓑ B حدث العدد يقبل القسمة على 7

$B = \{7, 14, 21, 28, 35, 42, 49\}$

$n(B) = 7$

$p(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{7}{50}$

ج) $A \cap B = \{35\} \Rightarrow n(A \cap B) = 1$

$\therefore p(A \cap B) = \frac{1}{50}$

$\therefore p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

$= \frac{10}{50} + \frac{7}{50} - \frac{1}{50} = \frac{16}{50} = \frac{8}{25}$

---

⑧ يراد اختيار لجنة طلابية تتكون من ثلاثة أشخاص من بين 12 طالب و 4 طالبات ما احتمال تحقق ما يأتي :

أ) ان تكون اللجنة جميعها طلاب ب) ان يكون في اللجنة طالب واحد فقط .

الحل/ أ) احتمال ان يكون اللجنة جميعها طلاب

$p(A) = \frac{C_3^{12}}{C_3^{16}} = \frac{11}{28}$

ب) احتمال ان يكون في اللجنة طالب واحد فقط

$p(B) = \frac{C_2^{4} \times C_1^{11}}{C_3^{16}} = \frac{9}{70}$

---

⑨ رمية حجري نرد متمايزان مرة واحدة ما احتمال ان يكون مجموع العددين الظاهرين 9 أو يساوي 11 .

الحل/ $A = \{(3,6), (6,3), (5,4), (4,5)\} \Rightarrow n(A) = 4$

حيث $n(S) = 36$

$\therefore p(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{36}$

$B = \{(5,6), (6,5)\} \Rightarrow n(B) = 2$

$\therefore p(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{2}{36}$

$A \cap B = \Phi \Rightarrow n(A \cap B) = 0$ $\therefore A , B$ حدثان منفصلان

$\therefore p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

$= \frac{4}{36} + \frac{2}{36} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

مبرهنة ذات الحدين : Binomial Theorem

هي قانون لإيجاد ما يساوي أي مقدار ذي حدين $(a+b)$ اذا رفع الى أي أس بدون اجراء عملية الضرب اذا كان الأس عدداً صحيحاً موجباً

① $(a+b)^n = C_0^n a^n b^0 + C_1^n a^{n-1} b^1 + C_2^n a^{n-2} b^2 + \dots\dots + C_n^n a^0 b^n$

② $(a-b)^n = C_0^n a^n b^0 - C_1^n a^{n-1} b^1 + C_2^n a^{n-2} b^2 - \dots\dots + C_n^n a^0 (-b)^n$

يعني اذا كانت الاشارة + بين a و b فأن جميع الحدود موجبة .
اذا كانت الاشارة − بين a و b فأن الحدود تكون سالبة ثم موجبة ثم سالبة الى آخر حد .

بعض الملاحظات على مفكوك ذي الحدين :

① عدد حدود المفكوك = $n+1$
② أس الحد الاول وأس الحد الاخير = n
③ أس مجموع أسس الرمز الاول والثاني المكونة للحد = n
④ أس الحد الاول يبدأ بالتناقص من n الى 0 والحد الثاني يبدأ بالزيادة من 0 الى n
⑤ اذا كان n عدد زوجي فأن عدد حدود المفكوك عدد فردي ورتبة الحد الاوسط $\frac{n}{2}+1$
⑥ اذا كان n عدد فردي فأن عدد حدود المفكوك عدد زوجي ويوجد وسطان في هذه الحالة فأن رتبة الوسط الاول = $\frac{n+1}{2}$ والثاني $\frac{n+1}{2}+1$

مثال اوجد مفكوك المقدار $(a+b)^5$

الحل / $(a+b)^5 = C_0^5 a^5 b^0 + C_1^5 a^4 b^1 + C_2^5 a^3 b^2 + C_3^5 a^2 b^3 + C_4^5 a^1 b^4 + C_5^5 a^0 b^5$

$= a^5 + 5a^4 b + 10a^3 b^2 + 10a^2 b^3 + 5ab^4 + b^5$

مثال أوجد قيمة $(101)^3$

$(101)^3 = (1+100)^3 = 1 + C_1^3\, 100 + C_2^3 (100)^2 + C_3^3 (100)^3$

$= 1 + 300 + 30000 + 1000000 = 1030301$

اذا كان مفكوك $(A+B)^n$ فان:

قانون الحد العام

$$P_r = C^n_{r-1}\, a^{n-r+1} \cdot b^{r-1}$$

مثال جد الحد الخامس في مفكوك $(a+b)^{10}$

الحل/

$$P_r = C^n_{r-1}\, a^{n-r+1} \cdot b^{r-1}$$

$$P_5 = C^{10}_4\, a^{10-4} \cdot b^4 = \frac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2\times1} a^6 b^4 = 210\, a^6 b^4$$

مثال برهن أن مفكوك $\left(x^2 + \frac{2}{x^3}\right)^{10}$ يحتوي على الحد الذي فيه x^{15} ثم جد معامله.

الحل/ نفرض ان الحد الذي يحتوي على x^{15} هو P_r

$$P_r = C^{10}_{r-1} (x^2)^{10-r+1} \cdot \left(\frac{2}{x^3}\right)^{r-1}$$

$$x^{15} = (x^{22-2r})(x^{-3r+3}) \Rightarrow x^{15} = x^{25-5r} \Rightarrow 15 = 25 - 5r$$

$$\therefore 5r = 10 \Rightarrow r = 2$$

$$\therefore P_2 = C^{10}_1 (x^2)^9 \left(\frac{2}{x^3}\right) = 10\, x^{18} \cdot \frac{2}{x^3} = 10\, x^{15}$$

$\therefore$ معامل $P_2 = 10$.

مثال اوجد الحدين الأوسطين في مفكوك $\left(\frac{3x}{2} - \frac{2}{3x}\right)^7$

الحل/ عدد الحدود $7+1=8$

$\therefore$ الحد الاوسط الاول رتبته $4 = \frac{8}{2}$ والحد الاوسط الثاني $5 = 1+4$

$$\text{و}_1 \quad \therefore P_4 = C^7_3 \left(\frac{3x}{2}\right)^4 \left(-\frac{2}{3x}\right)^3 = \frac{7\times6\times5}{3\times2\times1}\left(\frac{81x^4}{16}\right)\cdot\left(\frac{-8}{27x^3}\right) = -\frac{105x}{2}$$

$$\text{و}_2 \quad P_5 = C^7_4 \left(\frac{3x}{2}\right)^3 \left(-\frac{2}{3x}\right)^4 = \frac{7\times6\times5\times4}{4\times3\times2\times1}\cdot\frac{27x^3}{8}\cdot\frac{16}{81x^4} = \frac{70}{3x}$$

مثال اذا كانت النسبة بين الحدين الخامس والعاشر في مفكوك $(1+x)^{12}$ تساوي $\frac{8}{27}$ جد قيمة x

الحل/ بدلنا 9 بالعدد 3 جائز

$$P_5 = C^{12}_4\, x^4 \quad , \quad P_{10} = C^{12}_9\, x^9 = C^{12}_3\, x^9$$

$$\therefore \frac{P_5}{P_{10}} = \frac{8}{27} \Rightarrow \frac{C^{12}_5\, x^4}{C^{12}_9\, x^9} = \frac{8}{27}$$

$$\therefore \frac{\frac{12\times11\times10\times9}{4\times3\times2\times1}}{\frac{12\times11\times10}{3\times2\times1}x^5} = \frac{8}{27} \Rightarrow \frac{9}{x^5} = \frac{8\times4}{27}$$

$$\therefore x^5 = \frac{9\times27}{8\times4} = \frac{3^5}{2^5} = \left(\frac{3}{2}\right)^5 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

مثال/ أختصر المقدار $(2+x)^4+(2-x)^4$ الى ابسط صورة ثم جد قيمة المقدار $(2+\sqrt{3})^4-(2-\sqrt{3})^4$

الحل/ ضعف الحدود الفردية في مفكوك $(2+x)^4-(2-x)^4=(2+x)^4$

$$= 2[P_1+P_3+P_5] = 2\left[2^4+C_2^4(2)^2(x)^2+x^4\right]$$

نضع $x=\sqrt{3}$

$$= 2\left[16+24\times(\sqrt{3})^2+(\sqrt{3})^4\right] = 2\times97 = 194$$

مثال2/ أختصر المقدار $\left(x+\frac{1}{x}\right)^5-\left(x-\frac{1}{x}\right)^5$ ثم أوجد قيمة $\left(2+\frac{1}{2}\right)^5-\left(2-\frac{1}{2}\right)^5$

الحل/ ضعف الحدود الزوجية في مفكوك $\left(x+\frac{1}{x}\right)^5-\left(x-\frac{1}{x}\right)^5=\left(x+\frac{1}{x}\right)^5$

$$= 2[P_2+P_4+P_6]$$

$$= 2\left[C_1^5x^4\left(\frac{1}{x}\right)+C_3^5x^2\left(\frac{1}{x}\right)^3+C_5^5x^0\left(\frac{1}{x}\right)^5\right]$$

$$= 2\left[5x^3+\frac{10}{x}+\frac{1}{x^5}\right]$$ نضع $x=2$

$$= 2\left[5(2)^3+\frac{10}{2}+\frac{1}{2^5}\right]$$

$$= 2\left[40+5+\frac{1}{32}\right] = 90\frac{1}{16}$$

$$\therefore \left(2+\frac{1}{2}\right)^5-\left(2-\frac{1}{2}\right)^5 = 90\frac{1}{2}$$

تمارين (4 - 9)

① جد مفكوك كل مما يأتي

ⓐ $(a-b)^3 = C_0^3 a^3 b^0 - C_1^3 a^2 b^1 + C_2^3 a^1 b^2 - C_3^3 a^0 b^3$

$= a^3 - 3a^2 b + 3ab^2 - b^3$

ⓑ $(1+x)^4 = C_0^4 (1)^4 (x)^0 + C_1^4 (1)^3 x^1 + C_2^4 (1)^2 x^2 + C_3^4 (1)^1 x^3 + C_4^4 (1)^0 x^4$

$= 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4$

---

② أوجد الحد الثامن في مفكوك $(2x + \frac{1}{x})^{10}$

الحل/

$P_8 = C_7^{10} (2x)^3 (\frac{1}{x})^7 = C_3^{10} (8x^3)(\frac{1}{x^7}) = \frac{960}{x^4}$

---

③ أوجد الحد الاوسط في مفكوك $(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}})^{10}$

الحل/ عدد الحدود $= 10 + 1 = 11$ حداً.

$\therefore \frac{n}{2} + 1 = \frac{10}{2} + 1 = 6$ رتبة الحد الاوسط

$\therefore P_6 = C_5^{10} (\sqrt{x})^5 (\frac{1}{\sqrt{x}})^5 = C_5^{10} (\sqrt{x})^5 \cdot \frac{1}{(\sqrt{x})^5} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 252$

---

④ أوجد الحدين الاوسطين $(3x^2 + \frac{2}{3x})^5$

الحل/ عدد الحدود $= 5 + 1 = 6$

$\therefore$ يوجد وسطين

$\frac{5+1}{2} = 3$ رتبة الوسط الاول ، $3 + 1 = 4$ رتبة الوسط الثاني

$P_3 = C_2^5 (3x^2)^3 (\frac{2}{3x})^2 = \frac{5 \times 4}{3 \times 2} \cdot 27x^6 \cdot \frac{4}{9x^2} = 120x^4$

$P_4 = C_3^5 (3x^2)^2 (\frac{2}{3x})^3 = \frac{5 \times 4 \times 3}{\times 2 \times 1} \cdot 9x^4 \cdot \frac{8}{27x^3} = \frac{80}{3} x$

---

⑤ اذا كانت نسبة الحد الثامن ، الى الحد الثالث في مفكوك $(3x+2)^{10}$ تساوي $\frac{1}{12}$ جد قيمة x.

الحل/

$\frac{P_8}{P_3} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{C_7^{10} (3x)^3 (2)^7}{C_2^{10} (3x)^8 (2)^2} = \frac{1}{2}$

$$\therefore \frac{\frac{10\times9\times8}{3\times2\times1}\cdot 27x^3\cdot(2)^5}{\frac{10\times9}{2\times1}\cdot(3)^5x^5\cdot(2)^2} = \frac{1}{12} \Rightarrow \frac{(240)(32)}{(90)(243)x^5} = \frac{1}{12}$$

$$\therefore x^5 = \frac{24\times32\times12}{9\times243} = \frac{2^{10}}{3^5} = \left(\frac{4}{3}\right)^5 \Rightarrow x = \frac{4}{3}$$

---

⑥ اوجد الحد الخالي من x في مفكوك $\left(\frac{3x^2}{2} - \frac{1}{3x}\right)^9$

الحل/ نفرض الحد الخالي من x هو P_r

$$\therefore P_r = C^9_{r-1}\left(\frac{3x^2}{2}\right)\left(-\frac{1}{3x}\right)^{r-1}$$

$$x^0 = (x^2)^{10-r}(x^{-1})^{r-1} \Rightarrow x^0 = x^{20-2r}\cdot x^{-r+1}$$

$$\therefore 0 = 20-2r-r+1$$

$3r = 21 \Rightarrow r = 7$ الحد الخالي من x هو الحد السابع

$$P_7 = C^9_6\left(\frac{3x^2}{2}\right)^3\left(-\frac{1}{3x}\right)^6 = C^9_3\,\frac{27x^6}{8}\cdot\frac{1}{729x^6}$$

$$= \frac{9\times8\times7}{3\times2\times1}\cdot\frac{27}{8}\cdot\frac{1}{729} = \frac{7}{18}$$

---

⑦ في مفكوك $\left(x^2 + \frac{a}{x}\right)^5$ اذا كان معامل x يساوي 80 فأن $x=2$ جد قيمة a.

الحل/

$$P_r = C^5_{r-1}(x^2)^{5-r+1}\left(\frac{a}{x}\right)^{r-1}$$

$$\therefore x^1 = x^{12-2r}\cdot x^{-r+1}$$

$$1 = 12-2r-r+1$$

$3r = 12 \Rightarrow r = 4$ ∴ x يقع في الحد الرابع

$$P_4 = C^5_3(x^2)^2\left(\frac{a}{x}\right)^3$$

$$= \frac{5\times4\times3}{3\times2\times1}\cdot x^4\cdot\frac{a^3}{x^3} \Rightarrow P_4 = 10a^3x$$

$$\therefore 10a^3 = 80 \Rightarrow a^3 = 8$$

$$\therefore a = 2$$

⑧ فيما يأتي اربع أجابات واحدة منها صحيحة حدد الإجابة الصحيحة .

أ) الحد الثالث في مفكوك $(x+2)^6$

① $6x^3$ ② $120x^4$ ③ $40x^4$ ④ $60x^4$

الحل/ نجد الحد الثالث

$P_3 = C_2^6 (x)^4 (2)^2$

$= \frac{6\times5}{2\times1} \cdot x^4 \cdot 4 = 60x^4$

∴ الاجابة رقم (4)

ب) اذا كان الحدان الاوسطان في مفكوك $(5x+4y)^7$ متساويان فأن

① $x = \frac{2}{5}y$ ② $x = \frac{4}{5}y$ ③ $x = \frac{5}{4}y$ ④ $x = y$

الحل/ الحدان الاوسطان هما

$\frac{7+1}{2} = 4$, $4+1 = 5$

$P_4 = P_5 \Rightarrow C_3^7 (5x)^4 (4y)^3 = C_4^7 (5x)^3 (4y)^4$

$\frac{7\times6\times5}{3\times2\times1} \cdot 625 x^4 \cdot 64 y^3 = \frac{7\times6\times5\times4}{4\times3\times2\times1} \cdot 125 x^3 \cdot 256 y^4$

$5x^4 y^3 = 4x^3 y^4$

$\therefore 5x = 4y \Rightarrow x = \frac{4}{5}y$

∴ الاجابة رقم (2)

الفصل العاشر
chapter 10

المصفوفات : Matrices

المصطلح	الرمز أو العلاقة الرياضية
المصفوفة A	$A = [a_{ij}]$
محدد المصفوفة A	$\Delta A = \lvert a_{ij} \rvert$
النظير الجمعي للمصفوفة A	$-A$
النظير الضربي للمصفوفة A	A^{-1}
طريقة كرامر في حل معادلتين	$X = \frac{\Delta x}{x}$, $y = \frac{\Delta y}{\Delta}$

الفصل العاشر
- المصفوفات Matrices
- المحددات Determinats

أولاً : المصفوفات :

المصفوفة عبارة عن تنظيم عددي مؤلف من $m \times n$ عنصراً مرتبة في جدول مستطيل مكون من m صفاً و n عموداً حيث $m, n \in N^{+}$. ونقول عن المصفوفة انها من النوع $m \times n$ وتقرأ m في n اذا كانت تحتوي على صفوفاً عددها m واعمدة عددها n عموداً كما تقرأ اختصاراً مصفوفة $m \times n$ مثل مصفوفة 3×2 اي عدد الصفوف 3 وعدد الاعمدة 2

ويرمز للمصفوفة بحرف مثل $A, B, C, \ldots$ وللعلم أن عناصر المصفوفة تنتمي الى حقل الاعداد الحقيقية R .

مثال على كتابة المصفوفة

$$\begin{array}{c} ع_1 \quad ع_2 \quad ع_3 \\ \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -3 & 5 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} ص_1 \\ ص_2 \\ ص_3 \end{matrix} \end{array}$$

هذه مصفوفة تحتوي على 3 صفوف و 3 أعمدة فالعدد (2) يقع في الصف الثاني والعمود الثالث . والعدد (4) يقع في الصف الثالث والعمود الثاني

∴ المصفوفة من النوع 3×3 أي ان $m=3$ ، $n=3$

أمثلة على المصفوفات

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 7 \end{bmatrix} , \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} , \quad C = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

المصفوفة A من النوع 2×3 ، المصفوفة B من النوع 3×2
المصفوفة C من النوع 2×2

$$D = \begin{bmatrix} a_{11} & b_{12} \\ a_{21} & b_{22} \end{bmatrix} , \quad E = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

المصفوفة A من النوع 2×3 ، المصفوفة B من النوع 3×2
المصفوفة C من النوع 2×2 ، المصفوفة D من النوع 2×2
المصفوفة E من النوع 3×3 .

اذا كانت A مصفوفة من النوع $m \times n$ فاننا نكتب A على الصورة

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots\cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}] \qquad \begin{array}{l} i = 1, 2, 3, \ldots m \\ j = 1, 2, 3, \ldots n \end{array}$$

مثال / اذا كانت $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ عين قيم جميع العناصر a_{ij}

الحل/ بما أن المصفوفة من النوع 2×3 فأن:

$i = 1,2$ بينما $j=1,2,3$ وبالتالي فأن a_{ij} لها ستة قيم هي:

$a_{11}=1$, $a_{12}=-1$, $a_{13}=2$, $a_{21}=-4$, $a_{22}=1$, $a_{23}=5$

تساوي مصفوفتين:

نقول ان المصفوفتين A ، B متساويتان $A = B$

1. A,B من نوع واحد وان عدد صفوف A = عدد صفوف B وعدد أعمدة A = عدد أعمدة B

$a_{ij} = b_{ij}$ لجميع قيم i, j الممكنة حيث i, j عددان طبيعيان موجبان

مثال / عين جميع عناصر المصفوفة $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$ اذا كانت

$$A = B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 6 \\ -3 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

الحل/ من تعريف تساوي مصفوفتين نجد أن:

$a_{11}=2$, $a_{21}=-3$, $a_{12}=-1$, $a_{22}=0$, $a_{13}=6$, $a_{23}=-4$

بعض المصفوفات الشهيرة:

أ) المصفوفة المستطيلة: هي مصفوفة من نوع $m\times n$ حيث $m \neq n$
وعندما $m=1$ (مصفوفة الصف) من النوع $1\times n$
وعندما $n=1$ (مصفوفة العمود) من النوع $m\times1$

ب) المصفوفة المربعة: وهي المصفوفة من النوع $m\times n$ حيث $m=n$

ج) المصفوفة القطرية: وهي مصفوفة مربعة جميع عناصرها اصفار ما عدا العناصر الواقعة على القطر فيكون احدها على الاقل مغايراً للصفر

د) مصفوفة الوحدة: وهي مصفوفة قطرية يكون فيها كل من العناصر الواقعة على القطر مساوياً للواحد.

هـ) المصفوفة الصفرية: وهي على $m\times n$ وجميع عناصرها اصفار نرمز لها (0)

مثال ⓐ المصفوفة $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ مستطيلة فيها $n=3$ ، $m=2$

ⓑ المصفوفة $\begin{bmatrix} 12 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ مصفوفة صف فيها $n=3$ ، $m=1$

ⓒ المصفوفة $\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ مصفوفة عمود فيها $n=1$ ، $m=3$

ⓓ المصفوفة $\begin{bmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \\ 6 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ مصفوفة مربعة 3×3 قطرها الاساسي $3, 2, 6$ وقطرها الثانوي الآخر $1, 2, 5$

ⓔ المصفوفة $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ مصفوفة قطرية 3×3 عناصر قطرها $1, -1, 2$

ⓕ كل من المصفوفات $[1]$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ هي مصفوفة وحدة

ⓖ كل من المصفوفات $[0]$ $\begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

هي مصفوفة صفرية لاحظ ان كل واحدة تختلف عن الاخرى مثلاً

$\begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}_{1\times2} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{2\times1}$ لان الاولى من النوع 2×1 بينما الثانية من النوع 1×2 .

جمع المصفوفات وضربها في عدد حقيقي :

اذا كانت $A=[a_{ij}]$ ، $B=[b_{ij}]$ مصفوفتين كل منهما $m \times n$
فان مجموعهما هو المصفوفة $C=[c_{ij}]$ حيث $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$

$$\therefore A+B=[a_{ij}+b_{ij}]$$

فنحصل على مصفوفة من النوع نفسه .

مثال اذا كانت

$$A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 5 & -6 & 1\end{bmatrix} , B=\begin{bmatrix}2 & 3 & 4\\ -5 & 3 & 7\end{bmatrix}$$

فأوجد: $A+A$ ، $B+A$ ، $A+B$

الحل/

$$A+B=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 5 & -6 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & 3 & 4\\ -5 & 3 & 7\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix}3 & 1 & 7\\ 0 & -3 & 8\end{bmatrix}$$

$$B+A=\begin{bmatrix}2 & 3 & 4\\ -5 & 3 & 7\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 5 & -6 & 1\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix}3 & 1 & 7\\ 0 & -3 & 8\end{bmatrix}$$

$$\therefore A+B=B+A$$

$$A+A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 5 & -6 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 5 & -6 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -4 & 6\\ 10 & -12 & 2\end{bmatrix}$$

لاحظ ان $2A$ تمثل ضرب كل من عنصر في A بالعدد (2)

تعريف: اذا كانت $A=[a_{ij}]$ مصفوفة $m \times n$ وكانت $K \in R$ فان حاصل ضرب المصفوفة A بالعدد الحقيقي K هو المصفوفة $C=[c_{ij}]$ حيث $c_{ij}=Ka_{ij}$ لجميع قيم ij الممكنة اي ان: $KA=[Ka_{ij}]$

مثال اذا كانت

$$A = \begin{matrix} -3 & 1 \\ 2 & 4 \\ 0 & -1 \end{matrix}$$

نجد المصفوفة $K.A$ عندما تكون :

أ) $K=2$ ب) $k=\frac{1}{2}$ ج) $K=-1$

الحل/ أ)

$$KA = 2A = 2\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 2 \\ 4 & 8 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

ب)

$$kA = \frac{1}{2}A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

ج)

$$kA = -1\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & -4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

نظير المصفوفة بالنسبة لعملية الجمع :

تعريف : اذا كانت B ، A مصفوفتين من النوع $m\times n$ فان :

$$A - B = A + (-1)B$$

مثال اذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 5 \\ -6 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & -1 \end{bmatrix}$$

نجد كلاً من $B - A$ ، $A - B$ وتحقق انهما غير متساويتين .

الحل/

$$A - B = A + (-1)B = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 5 \\ -6 & 1 & 0 \end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & -3 & 5 \\ -6 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 0 & -7 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & -4 & 2 \\ -6 & -6 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B - A = B + (-1)A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & -1 \end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix} 3 & -3 & 5 \\ -6 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 3 & -5 \\ 6 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 4 & -2 \\ 6 & 6 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A - B \neq B - A$$

خواص جمع المصفوفات: اذا كانت H مجموعة المصفوفات من النوع $m \times n$ فأن $(H, +)$ حيث $(+)$ عملية جمع المصفوفات يتمتع بالخواص:

ⓐ العملية $(+)$ ثنائية على H لأن: $\forall A, B \in H \Rightarrow A + B \in H$

ⓑ العملية $(+)$ ابدالية $A + B = B + A$

ⓒ العملية $(+)$ تجميعية $\forall A, B, C \in H \Rightarrow (A+B)+C = A + (B+C)$

ⓓ وجود العنصر المحايد وهو المصفوفة الصفرية لأن: $(0) + A = A + (0) = A$

ⓔ لكل مصفوفة A تنتمي الى H يوجد مصفوفة $-A$ بحيث $A + (-A) = 0$

$\therefore$ النظام $(H, +)$ زمرة ابدالية.

خواص ضرب عدد حقيقي بمصفوفة:

اذا كانت A, B مصفوفتين من النوع $m \times n$ وكان $K, L \in R$ فأن:

ⓐ $K(A+B) = K \cdot A + K \cdot B$

ⓑ $(K+L) \cdot A = K \cdot A + L \cdot A$

ⓒ $K \cdot (LA) = (K \cdot L)A$

ⓓ if $K \cdot A = 0 \Leftrightarrow K = 0$ or $A = 0$

ⓔ if $K \cdot A = K \cdot B$, $K \neq 0 \Rightarrow A = B$

ⓕ $1 \cdot A = A$

مثال اذا كانت $A, B, C \in H$ حيث H مجموعة المصفوفات من النوع $m \times n$ فجد C التي هي حل المعادلة $C + B = A$

الحل/

$C + B + (-B) = A + (-B)$ اضافة $(-B)$ الى الطرفين

$C + (B - B) = A - B$ خاصية التجميع والنظير

$C + 0 = A - B \Rightarrow C = A - B$ خاصية العنصر المحايد

ملاحظة: إن $-B$ هي النظير الجمعي للمصفوفة B وهو نظير وحيد والعنصر المحايد وحيد وبالتالي تكون $C=A-B$ حلاً وحيداً للمعادلة.

مثال اذا كانت

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$$

جد حل المعادلة $C+B=A$ وتحقق من صحة الناتج.

الحل/

$$C = A-B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

التحقق:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = A$$

مثال حل المعادلة المصفوفية الاتية:

$$-3\left(C - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\right) = -4C + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

الحل/

$$-3C + 3\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = -4C + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$-3C + \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} = -4C + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$4C - 3C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

تمارين (1 - 10)

① جد قيم h ، z ، y ، x اذا كان:

أ)

$$\begin{bmatrix} x-2 & 2y+1 \\ x+3 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ z & 3h-2 \end{bmatrix}$$

الحل

من خواص التساوي نجد ان:

$$x-2=3 \Rightarrow x=3+2=5$$

$$2y+1=-5 \Rightarrow 2y=-5-1 \Rightarrow 2y=-6 \Rightarrow y=-3$$

$$x+3=z \Rightarrow 5+3=z \Rightarrow z=8$$

$$16=3h-2 \Rightarrow 3h=16+2 \Rightarrow 3h=18 \Rightarrow h=6$$

ب)

$$\begin{bmatrix} 3x & 10 \\ 2x+z & 2y-h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 2y \\ 10 & 0 \end{bmatrix}$$

الحل/

$$3x=15 \Rightarrow x=5$$

$$10=2y \Rightarrow y=5$$

$$2x+z=10 \Rightarrow 2(5)+z=10 \Rightarrow 10+z=10 \Rightarrow z=0$$

$$2y-h=0 \Rightarrow 2(5)-h=0 \Rightarrow 10-h=0 \Rightarrow h=10$$

② اجر العمليات الآتية ان امكن ، مع ذكر السبب في حالة تعذر اجراء العملية:

أ)

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 6 & -9 \end{bmatrix}$$

ب)

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 5 & -6 \end{bmatrix}$$

لا يمكن اجراء عملية الجمع لان الاعمدة في المصفوفة الاولى 3 وفي الثانية 2

ح) لا يمكن اجراء عملية الجمع للاختلاف في عدد الصفوف والأعمدة

$$\begin{bmatrix} 6 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ي) لا يمكن اجراء عملية الطرح للاختلاف في عدد الصفوف .

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}$$

---

3) اذا كانت $A = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ جد المصفوفة $k.A$ عندما تكون:

أ) $k=1$ ب) $k=\frac{2}{5}$ ج) $k=0$ د) $k=-1$ هـ) $k=2$

الحل أ)

$$k.A = 1.\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

ب)

$$k.A = \frac{2}{5}\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{4}{5} & -\frac{6}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

ج)

$$k.A = 0\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

د)

$$k.A = -1\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$$

هـ)

$$k.A = 2\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -6 \\ 2 & 4 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$$

④ اذا كانت $A=[5 \quad 1]$ ، $B=[0 \quad 5]$ ، $C=[0 \quad -5]$ فجد عن كل مما يأتي :

$$A+(B+C) = [5 \quad 1] + ([0 \quad 5] + [0 \quad -5])$$

$$= [5 \quad 1] + [0 \quad 0]$$

$$= [5 \quad 1]$$

$$2A+B+C = 2[5 \quad 1] + ([0 \quad 5] + [0 \quad -5])$$

$$= [10 \quad 2] + [0 \quad 0]$$

$$= [10 \quad 2]$$

---

⑤ باستعمال المصفوفات A, B, C الواردة في التمرين (4) حل كل من المعادلات المصفوفية الآتية :

$$A+X = B+C \Rightarrow X = B+C-A$$

$$\therefore X = ([0 \quad 5] + [0 \quad -5]) - [5 \quad 1]$$

$$= [0 \quad 0] + [-5 \quad -1] = [-5 \quad -1]$$

$$\therefore X = [-5 \quad -1]$$

$$2(B-C) = 2(X-C) - B$$

$$2B - 2C = 2X - 2C - B$$

$$-2X = -2C - B + 2C - 2B$$

$$-2X = -3B$$

$$\therefore 2X = 3B \Rightarrow$$

$$X = \frac{3}{2}B = \frac{3}{2}[0 \quad 5] = [0 \quad \frac{15}{2}]$$

$$\therefore X = [0 \quad \frac{15}{2}]$$

$$\left(\frac{1}{2}(A+X) = 3X + 2B\right) \times 2$$

$$A + X = 6X + 4B$$

$$X - 6X = 4B - A \Rightarrow -5X = 4B - A \Rightarrow X = -\frac{4}{5}B + \frac{1}{5}A$$

$$\therefore X = \frac{-4}{5}[0 \quad 5] + \frac{1}{5}[5 \quad 1] = [0 \quad -4] + [1 \quad \frac{1}{5}] = [1 \quad \frac{-19}{5}]$$

ضرب المصفوفات: $(A \times B)$ شروطها هي:

① اعمدة A = صفوف B واذا كانت A من النوع $m \times L$ وكانت B من النوع $L \times n$ فان المصفوفة $A \times B$ ستكون من النوع $m \times n$

② اذا كانت A, B مصفوفتين مربعتين $m \times m$ فان $A \times B$ مصفوفة $m \times m$
واذا كانت $A = B$ فتكتب AA بالصورة x^2 ايضاً $A^2 = A.A$

امثلة عن الضرب:

① $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$

فان حاصل ضرب:

$$A \times B = \begin{bmatrix} 1 \times 5 + 2 \times 4 + 3 \times (-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 + 8 - 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \end{bmatrix}$$

② $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$

$$A \times B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times 5 + 3 \times 4 & 1 \times (-1) + 3 \times 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 17 & -1 \end{bmatrix}$$

③ $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$A \times B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times (-1) + (-1) \times 0 + 3 \times 1 \\ 2 \times (-1) + 0 \times 0 + 1 \times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

④ $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

$$A \times B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 + 0 + (-1) & 6 + 0 + 0 \\ 1 + (-5) + (-3) & 3 + (-1) + 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -7 & 2 \end{bmatrix}$$

مثال اذا كانت $B = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ ، $A = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$

جد ان أمكن (أ) $A \times B$ (ب) $B \times A$ (ج) A^2 (د) B^2

الحل/

(أ) بما ان عدد أعمدة A = عدد صفوف B فان $A \times B$ يمكن ايجادها :

$$A \times B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -3 & 6 \\ 14 & 5 & 12 \end{bmatrix}$$

(ب) بما ان اعمدة A ≠ عدد صفوف B فلا يمكن ايجاد $B \times A$

(ج) $$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & -21 \\ 28 & 13 \end{bmatrix}$$

(د) لا يمكن ايجاد B^2 لأن اعمدة B ≠ عدد صفوف B .

مثال اذا كانت $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

نأثبت ان عملية ضرب المصفوفات ليست ابدالية $A \times B \neq B \times A$

الحل/

$$A \times B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & 25 \\ 12 & 20 \end{bmatrix}$$

$$B \times A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 10 \\ 9 & 35 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A \times B \neq B \times A$$

مثال اذا كانت $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

$$A \times I = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{21} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = A$$

$$I \times A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = A$$

نستنتج ان I عنصر محايد ضربي للمصفوفة المربعة من النوع 2x2

مثال/ اذا علمت ان

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

نجد كلاً من x ، y ، z

الحل/

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 13 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \Rightarrow x=-2 \quad , y=13 \quad , z=0$$

مثال/ اذا علمت أن A مصفوفة من النوع 2×3 ، B مصفوفة من النوع 3×2 نجد نوع كل من المصفوفات الآتية:

أ) $A\times B$ مصفوفة من النوع 2×2

ب) $\underset{2\times3}{A} \times \underset{2\times2}{(A\times B)}$ مصفوفة من النوع 2×3

جـ) $B\times A$ مصفوفة من النوع 3×3

د) $\underset{3\times2}{B} \times \underset{3\times3}{(B\times A)}$ مصفوفة من النوع 3×2

مثال/ اذا كانت $A=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ فأثبت أن: $A^2-3A+2I=0$

الحل/

$$A^2-3A+2I=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$=\left(\begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & -9 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}\right) + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

∴ الطرف الايمن = الطرف الايسر .

تمارين (2 - 10)

① اذا كانت $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} , B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} , C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

نجد

ⓐ $A \times B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

ⓑ $A \times C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

ⓒ $B \times C = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

ⓓ $B \times A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

ⓔ $C \times A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

ⓕ $C \times B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

ⓖ $(A \times B) \times C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
معلوم

ⓗ $A \times (B \times C) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
معلوم

---

② اذا كانت A, B, C من التمرين السابق وكانت I مصفوفة الوحدة فأثبت أن:

ⓐ $A \times B = -(B \times A)$

الحل — عوضنا مباشرة من السؤال السابق

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\therefore \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

ⓑ $A^2 = C^2 = I$

$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$

$C^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = I$

ⓒ $B^2 = -I$

$$B^2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = -I$$

ⓓ $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$

من السؤال السابق فرع (g) = فرع (h) فالعلاقة صحيحة

---

③ اذا كانت A مصفوفة من النوع 3×2 و B من النوع 3×3 و C من النوع 4×3 و D مصفوفة من النوع 3×2 فبين نوع كل من المصفوفات الآتية:

أ) $A\times B$ مصفوفة من النوع 2×3

ب) $D\times A$ مصفوفة من النوع 3×3

ج) $A\times D$ مصفوفة من النوع 2×2

د) $C\times B$ مصفوفة من النوع 4×3

هـ) $B\times D$ مصفوفة من النوع 3×2

و) $D\times(A\times B)$ مصفوفة من النوع 3×3

ز) $(C\times B)\times D$ مصفوفة من النوع 4×2

ح) $(D\times A)\times A$ لا يمكن اجراء عملية الضرب لان اعمدة $(D\times A) \neq$ عدد صفوف A

---

④ أجر عمليات الضرب فيما يأتي ، ان أمكن واذكر السبب في حالة تعذر اجراء عملية الضرب .

ⓐ $$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -3 & 6 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ⓑ $$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10+0+18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 \end{bmatrix}$$

ⓒ $$\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 6 & 4 & 12 \end{bmatrix}$$

ⓓ $$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 8 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} =$$ لا يمكن اجراء الضرب لان اعمدة المصفوفة الاولى $\neq$ عدد صفوف الثانية

(e) $\begin{bmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 5 & 3 & 6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 9 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$ لايمكن اجراء الضرب لنفس السبب السابق

(f) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 4 & -2 & 3 \\ 1 & -3 & 1 & -3 \end{bmatrix}$

(g) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ لايمكن اجراء الضرب لنفس السبب السابق

(h) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 2 & -2 \\ -14 & 9 & 38 \end{bmatrix}$

---

(5) اذا كانت $A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$ ، $B = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$ ، $C = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$

بين صحة أو خطأ كل من العبارات الآتية مع ذكر السبب :

(a) $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$

$$L.H = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$R.H = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow L.H = R.H$$

∴ العبارة صحيحة

(b) $(B + C) \times A = B \times A + C \times A$ بقية الفروع تترك للطالب لكن :

$L.H \neq R.H$ العبارة خاطئة لأن

(c) $A \times (B + A) = A \times B + A^2 \Rightarrow L.H = R.H$ العبارة صحيحة لأن

(d) $A \times (B + C) = B \times A + C \times A \rightarrow L.H \neq R.H$ العبارة خاطئة لأن

(e) $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$ $L.H = R.H$ لأن العبارة صحيحة (الخاصية التجميعية)

⑥ اذا كانت $A=\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

فأثبت أنه

ⓐ $A^2 - 2A - 3I = 0$

الحل/

$$L.H = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 0 & -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

$\therefore L.H = R.H$

ⓑ $B^2 - B + I = 0$

الحل/

$$L.H = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

$\therefore L.H = R.H$

---

⑦ $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

فأثبت أن: $A \times B = B \times A = I$ لاحظ أن $A \times B$ كل منها نظير للآخر

$$A \times B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$B \times A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$\therefore A \times B = B \times A = I$

النظير الضربي للمصفوفة:

تعريف: النظير الضربي للمصفوفة A من النوع 2×2 إن وجدت مصفوفة B من النوع نفسه بحيث يكون:
$A\times B = B\times A = I$ حيث I المصفوفة المحايدة بالنسبة لعملية الضرب (اي مصفوفة الوحدة من النوع 2×2)
سنرمز للنظير الضربي للمصفوفة A بالرمز A^{-1} (أي ان $B = A^{-1}$)

تعريف: اذا كان $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ فان المقدار $ad - bc$ يسمى محدد المصفوفة A ويرمز له بالرمز $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ أو بالرمز Δ وتقرأ دلتا اي:

$$A \text{ محدد } = \Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

وان المقدار $ad - bc$ هو حاصل ضرب العنصرين الواقعين على القطر الاساسي في المصفوفة A مطروحاً من حاصل ضرب العنصرين الواقعين على القطر الآخر وان الرمز $|\;\;|$ لا يرمز للقيمة المطلقة في هذه الحالة.

مثال اذا علمت ان $B=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ ، $A=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}$

اوجد (أ) محدد A ، (ب) محدد B (جـ) $A\times B$ ، (د) $B\times A$
ماذا تستنتج من الفرعين (جـ) ، (د)

الحل/ (أ)

$$A \text{ محدد } = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -6 & 3 \end{vmatrix} = 2\times3 - 0\times(-6) = 6$$

(ب)

$$B \text{ محدد } = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\times\frac{1}{3} - 0\times1 = \frac{1}{6}$$

(جـ)

$$A\times B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -6 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(د)

$$B\times A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -6 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

نستنتج من جـ ، د ان كلاً من A ، B نظير ضربي للاخرى
اي ان $B = A^{-1}$ أو $A = B^{-1}$ حسب التعريف.

تعريف اذا كانت $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ فان النظير الضربي للمصفوفة A يكون موجوداً ومعرفاً عندما تكون محدد A لا تساوي صفر أي أن:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{\Delta} & \frac{-b}{\Delta} \\ \frac{-c}{\Delta} & \frac{a}{\Delta} \end{bmatrix}$$ وان $\Delta \neq 0$

ملاحظة: اذا كانت $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ للحصول على A^{-1} اذا كان موجوداً نتبع الخطوات التالية:

① اذا كانت $\Delta \neq 0$ فان للمصفوفة نظير ضربي ويتعين كالتالي:

أ) تبادل بين موقعي العنصرين الواقعين على القطر الرئيسي للمصفوفة a , d

ب) نغير كل من اشارتي العنصرين الواقعين على القطر الآخر للمصفوفة b , c

ج) نضرب المصفوفة الناتجة بالعدد $\frac{1}{\Delta}$ فنحصل على A^{-1}

② اذا كانت $\Delta = 0$ فان المصفوفة A ليس لها نظير ضربي.

مثال اذا كانت $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}$ حيث $xy \neq 0$ فاثبت أن لكل من A , B نظير ضربي ثم جده وكذلك بالنسبة للمصفوفة $A \times B$.

الحل/

A محدد $= \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 3 \times 4 - 0 = 12 \neq 0 \Rightarrow$ A لها نظير ضربي

B محدد $= \begin{vmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{vmatrix} = xy - 0 = xy \neq 0 \Rightarrow$ B لها نظير ضربي

$$A^{-1} = \frac{1}{12}\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{12} & 0 \\ 0 & \frac{3}{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{xy}\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{y} & 0 \\ 0 & \frac{1}{x} \end{bmatrix}$$

ملاحظة: اذا كانت المصفوفة قطرية عناصر قطرها الرئيسي $\neq 0$ فان نظيرها الضربي مصفوفة قطرية ايضاً عناصر قطرها هي مقلوب القطر الاساسي.

اما بالنسبة للمصفوفة $A \times B$ فان:

$$A \times B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x & 0 \\ 0 & 4y \end{bmatrix} \Rightarrow A \times B \text{ محدد } = \begin{vmatrix} 3x & 0 \\ 0 & 4y \end{vmatrix} = 12xy$$

وبما ان $A \times B$ مصفوفة قطرية مغايرة للصفر فان:

$$(A \times B)^{-1} = \frac{1}{12xy} \begin{bmatrix} 4y & 0 \\ 0 & 3x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3x} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4y} \end{bmatrix}$$

تحقق من ان: $(A \times B) \times (A \times B)^{-1} = (A \times B)^{-1} \times (A \times B) = I$

∴ يوجد للمصفوفة $A \times B$ نظير ضربي وهو $(A \times B)^{-1}$

مثال/ اي المصفوفات الآتية لها نظير ضربي ثم اوجده:

ⓐ $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow$ محدد المصفوفة $= \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \times 4 - 0 \times 3 = 8 \neq 0$

اذن المصفوفة لها نظير ضربي.

$$A^{-1} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{-3}{8} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

ⓑ $\begin{bmatrix} -5 & 5 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow$ محدد المصفوفة $= \Delta = \begin{vmatrix} -5 & 5 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} = -5 \times 3 - (5 \times -3) = -15 + 15 = 0$

∴ ليس للمصفوفة نظير ضربي لانه $\Delta = 0$

ⓒ $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$ محدد المصفوفة $= \Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times 1 - (-1 \times 1) = 2 \neq 0$

∴ المصفوفة لها نظير ضربي

$$C^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

ⓓ $\begin{bmatrix} 12 & 20 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow$ محدد المصفوفة $= \Delta = \begin{vmatrix} 12 & 20 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 12 \times 5 - 20 \times 3 = 0$

ليس لها نظير ضربي

مثال/ احسب قيم x التي تجعل المصفوفة $\begin{bmatrix} x & 3 \\ 12 & x \end{bmatrix}$ ليس لها نظير ضربي.

الحل/ لكي لا يكون للمصفوفة نظير ضربي فانه $\Delta = 0$. لذلك:

$$\begin{vmatrix} x & 3 \\ 12 & x \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x^2 - 36 = 0 \Rightarrow x^2 = 36 \Rightarrow x = \mp 6$$

حل معادلات الدرجة الاولى في مجهولين بأستخدام المصفوفات :

اذا كان نظام المعادلتين بالشكل :

$$ax + by = L$$
$$cx + dy = k$$

فيمكن كتابتها بالصيغة المصفوفية :

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L \\ k \end{bmatrix}$$

فلو فرضنا أن :

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} L \\ k \end{bmatrix}$$

$$A \cdot B = C \quad \text{------} (1)$$

تسمى A مصفوفة المعاملات ، B مصفوفة المجاهيل ، C مصفوفة الثوابت

واذا كانت $A \neq 0$ أي $\Delta = ad - bc \neq 0$ من الممكن ايجاد حل (1) كما يلي :

بضرب طرفي (1) في A^{-1} : $A^{-1}(A \times B) = A^{-1} \times C$

خاصية التجميع . $(A^{-1} \times A) \times B = A^{-1} \times C$

من تعريف النظير A : $I \times B = A^{-1} \times C$

لان I عنصر محايد : $B = A^{-1} C$

من الواضح ان بمقدورنا الآن ايجاد المجهولين x, y (اللذين يشكلان حل نظام المعادلتين الاصليتين) بدلالة الثوابت العددية a, b, c, d, L, k

---

مثال حل نظام المعادلتين الآتيتين بأستخدام المصفوفات ثم حقق النتائج :

$$2x + 5y = 1 \quad \text{------} (1)$$
$$3x + 7y = 2 \quad \text{------} (2)$$

الحل/ نكتب المصفوفة لكل من A و B و C من المعادلتين :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad : AB = C$$

A محدد : $\Delta = 2\times7 - 5\times3 = -1 \neq 0$

$\therefore$ A لها نظير ضربي ويكون الحل $B = A^{-1}\times C$

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix}7 & -5\\ -3 & 2\end{bmatrix} = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix}7 & -5\\ -3 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-7 & 5\\ 3 & -2\end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-7 & 5\\ 3 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\ -1\end{bmatrix}$$

$\therefore x = 3 \ , \ y = 1$

التحقيق بالتعويض المباشر في المعادلة ① و ② يحقق x , y نجد أن :

$2\times3 + 5(-1) = 1$

$3\times3 + 7(-1) = 2$

تمارين (3 - 10)

① جد النظير الضربي لكل من المصفوفات الآتية كلما أمكن ذلك :

ⓐ $\begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix} \Rightarrow \Delta = \begin{vmatrix}4 & 0\\ 0 & 2\end{vmatrix} = 4\times2 - 0\times0 = 8 \neq 0$

$\therefore$ يوجد لهذه المصفوفة نظير هو:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 4\end{bmatrix} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{4} & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

ⓑ $\begin{bmatrix}-3 & 9\\ 3 & -6\end{bmatrix} \Rightarrow \Delta = (-3)(-6) - 9\times3 = 18 - 27 = -9 \neq 0$

$\therefore$ المصفوفة لها نظير ضربي هو:

$$B^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix}-6 & -9\\ -3 & -3\end{bmatrix} = \frac{1}{-9}\begin{bmatrix}-6 & -9\\ -3 & -3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{2}{3} & 1\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

ⓒ $\begin{bmatrix}3 & 3\\ 3 & 3\end{bmatrix} \Rightarrow \Delta = \begin{vmatrix}3 & 3\\ 3 & 3\end{vmatrix} = 3\times3 - 3\times3 = 0$

ليس لهذه المصفوفة نظير ضربي لأن $\Delta = 0$

ⓓ $\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{bmatrix} \Rightarrow \Delta = 1\times4 - 2\times2 = 0$

ليس لهذه المصفوفة نظير ضربي لأن $\Delta = 0$

ⓔ , ⓕ, ⓖ, ⓗ تترك للطالب

② احسب قيم x التي تجعل كلاً من المصفوفات الآتية ليس لها نظير ضربي :

الحل/ لكي لا يكون للمصفوفة نظير ضربي فإن المحدد $\Delta = 0$. فنفرض محدد كل مصفوفة $\Delta = 0$ ونجد قيم x .

ⓐ $\begin{bmatrix} x & 2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \Delta = \begin{vmatrix} x & 2 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3x - 12 = 0$

$\therefore 3x = 12 \Rightarrow x = 4$

ⓑ $\begin{bmatrix} 9 & x \\ 4 & x \end{bmatrix} \Rightarrow \Delta = 9x - 4x = 0 \Rightarrow 5x = 0 \Rightarrow x = 0$

ⓒ $\begin{bmatrix} x & 4 \\ 2 & x^{-2} \end{bmatrix} \Rightarrow \Delta = (x)(x^{-2}) - 2(4) \Rightarrow x^{-1} - 8 = 0$

$\therefore x^{-1} = 8 \Rightarrow x = \frac{1}{8}$

ⓓ $\begin{bmatrix} x^{-2} & 2 \\ 1 & x^{-2} \end{bmatrix} \Rightarrow \Delta = x^{-4} - 2 = 0 \Rightarrow x^{-4} = 2$

$\therefore \frac{1}{x^4} = 2 \Rightarrow x^4 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \mp \sqrt[4]{\frac{1}{2}}$

---

③ إذا كانت $X = \begin{bmatrix} 3 & -12 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ فأثبت أن $X^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

الحل/ X محدد $= \Delta = 3(4) - 0(-12) = 12 \neq 0$

$\therefore$ X لها نظير ضربي $\leftarrow X^{-1}$

$X^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} 4 & 12 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{12}\begin{bmatrix} 4 & 12 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

$\therefore$ النظير الضربي صحيح .

---

④ إذا كانت $y = \begin{bmatrix} a & -ab \\ 0 & b \end{bmatrix}$ فأثبت أن $y^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 1 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{bmatrix}$ حيث $ab \neq 0$

$y = \begin{bmatrix} a & -ab \\ 0 & b \end{bmatrix} \Rightarrow \Delta = ab - 0(-ab) = ab \neq 0$

$\therefore$ للمصفوفة نظير ضربي y^{-1}

$y^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} b & +ab \\ 0 & a \end{bmatrix} = \frac{1}{ab}\begin{bmatrix} b & ab \\ 0 & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 1 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{bmatrix}$

$\therefore$ النظير الضربي صحيح .

⑤ اذا كانت $A = \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ فأثبت ان $A^{-1} = A$

الحل/

$\Delta = 1(-1) - 0(x) = -1 \neq 0$

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} -1 & -x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} -1 & -x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = A$$

$\therefore A^{-1} = A$

---

⑥ اذا كانت $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}$ فأجب عما يلي :

ⓐ احسب A^{-1} ، B^{-1} والجواب يترك للطالب حسب ما سبق ينتج

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ \frac{-3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} , \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

ⓑ جد ناتج $B^{-1} \times A^{-1}$ ، $A^{-1} \times B^{-1}$ نجري عملية الضرب للمصفوفتين :

$$A^{-1} \times B^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{10}{3} & -\frac{1}{3} \\ 2 & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} \times A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{35}{6} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

ⓒ جد $(A \times B)^{-1}$ ، $(A \times B)$.

$$A \times B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 8 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 6 \\ 70 & 24 \end{bmatrix}$$

$A \times B$ محدد $= \Delta = 18(24) - 6(70) = 432 - 420 = 12$

$$(A \times B)^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} 24 & -6 \\ -70 & 18 \end{bmatrix} = \frac{1}{12}\begin{bmatrix} 24 & -6 \\ -70 & 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{35}{6} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

ⓓ تحقق من ان $(A^{-1})^{-1} = A$

A^{-1} محدد $= \Delta = (4 \times \frac{1}{2}) - (-1 \times \frac{-3}{2}) = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$

$$(A^{-1})^{-1} = \frac{1}{\frac{1}{2}}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{3}{2} & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} = A$$

⑦ حل نظام المعادلتين الآتيتين باستخدام المصفوفات ثم حقق الناتج :

$3x - 4y = -5$ ----- ①

$3y - 5x = 1$ ----- ②

نرتب المعادلتين :

$3x - 4y = -5$ ----- ①

$-5x + 3y = 1$ ----- ②

نفرض $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$; $C = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix}$

$B = A^{-1} \cdot C$

A محدد : $\Delta = 3 \times 3 - (-5)(-4) = 9 - 20 = -11 \neq 0$

$\therefore A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-3}{11} & -\frac{4}{11} \\ -\frac{5}{11} & -\frac{3}{11} \end{bmatrix}$

$B = A^{-1} \cdot C = \begin{bmatrix} \frac{-3}{11} & -\frac{4}{11} \\ -\frac{5}{11} & -\frac{3}{11} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$\therefore \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$\therefore x = 1 \quad , y = 2$

التحقيق : نعوض عن قيمة x , y في المعادلتين ① , ②

$3(1) - 4(2) = 3 - 8 = -5$ ✓

$-5(1) + 3(2) = -5 + 6 = 1$ ✓

$\therefore$ الحل صحيح لانه قيم x, y تحقق المعادلتين

ثانياً / المحددات :

محددات الرتبة الثانية واستخدامها في حل معادلات ذات مجهولين :

$$ax + by = L \quad \ldots\ldots (1)$$

$$cx + dy = k \quad \ldots\ldots (2)$$

فالأعداد a, b, c, d تسمى المعاملات ، x, y تسمى المتغيرات (المجهولين)

L, k تسمى الثوابت تكون : $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ محدد المعاملات ويرمز له بالرمز Δ .

نلاحظ معاملات المجهول x تكون العمود الأول للمحدد Δ تسمى $\begin{vmatrix} L & b \\ k & d \end{vmatrix}$ محدد المجهول x ويرمز له Δx ونحصل عليها من Δ

وذلك بعد الاستعاضة عن العمود الأول (معاملات x) بالثوابت L, k

كما نسمي $\begin{vmatrix} a & L \\ c & k \end{vmatrix}$ محدد المجهول y ويرمز له Δy وذلك بتعويض العمود الثاني بالثوابت L, k علماً أن نفرض أن $\Delta \neq 0$ فإن قيمتي المجهولين x, y نجدهما

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} L & b \\ k & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{Ld - kb}{ad - cb} , \quad y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} a & L \\ c & k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{ak - cL}{ad - cb}$$

مثال / حل نظام المعادلتين الآتيتين باستخدام المحددات .

$$2x - 3y = -4 \quad , \quad 3x + y = 2$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} -4 \\ 2 \end{matrix}$$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} -4 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-4(1) - 2(-3)}{2(1) - 3(-3)} = \frac{-4 + 6}{2 + 9} = \frac{2}{11}$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{2(2) - 3(-4)}{11} = \frac{4 + 12}{11} = \frac{16}{11}$$

مثال حل نظام المعادلتين

$-3n = 4 - 3m$

$6m + n + 4 = 0$

الحل/ نرتب المعادلتين: $3m - 3n = 4$

$6m + n = -4$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 4 \\ -4 \end{matrix}$$

$$m = \frac{\Delta m}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -4 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 6 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{4 - 12}{3 + 18} = \frac{-8}{21}$$

$$n = \frac{\Delta n}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & -4 \end{vmatrix}}{21 \text{ من ب}} = \frac{-12 - 24}{21} = \frac{-36}{21} = -\frac{12}{7}$$

المحددات من الرتبة الثالثة:

مثال اذا كانت $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}$ جد قيمة محدد A

الحل/

$$A_{\text{محدد}} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 2(0 + 4) - 3(5 - 0) + 0(-1 - 0) = 8 - 15 + 0 = -7$$

طريقة أخرى للحل (طريقة كريمر).

نعيد تكرار العمود الأول والثاني بعد المحدد

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{matrix}$$

$$\Delta = (2 \times 0 \times 5 + 3 \times 4 \times 0 + 0 \times 1 \times (-1)) - (0 \times 0 \times 0 + 2 \times 4 \times (-1) + 3 \times 1 \times 5)$$

$$= 0 - (-8 + 15) = -7$$

مثال جد المحدد

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - (-3)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2(-2 - 0) + 3(-1 - 0) + 4(1 - 2 \times 0)$$

$$= -4 - 3 + 4 = -3$$

ويمكن حلها بطريقة كريمر.

أستخدام المحددات في حل ثلاث معادلات من الدرجة الأولى في ثلاث متغيرات

اذا كان لدينا نظام المعادلات الآتي في ثلاث مجاهيل x, y, z

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1$$
$$a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2$$
$$a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

نبدل العمود الاول بالثوابت d_1, d_2, d_3 لايجاد قيمة x

$$\Delta y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

نبدل العمود الثاني بالثوابت لايجاد قيمة y

$$\Delta z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

نبدل العمود الثالث بالثوابت لايجاد قيمة z

$$\therefore \quad x = \frac{\Delta x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta y}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta z}{\Delta}$$

مثال جد حل نظام المعادلات الآتي:

$$3x + 3y - z = 1$$
$$2x + 2y + z = 0$$
$$3x + y + 2z = -1$$

الحل/ نجد محدد المعاملات Δ :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 3(4-1) - 3(4-3) - 1(2-6) = 10$$

وبنفس الطريقة نجد كلاً من :

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2, \quad \Delta y = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2, \quad \Delta z = \begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{0}{4} = 0$$

مثال جد قيم k التي تجعل لنظام المعادلتين الآتية حلاً:

$$x + ky = 0$$
$$2x - y = 0$$

الحل/ يكون لهذا النظام حل عندما تكون محددة معاملاته لا تساوي صفراً عندما:

$$\begin{vmatrix} 1 & k \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow 1(-1) - 2k \neq 0 \Rightarrow -2k \neq 1 \Rightarrow k \neq -\frac{1}{2}$$

$$\therefore k \in R \setminus \{-\tfrac{1}{2}\}$$

خواص المحددات:

① في أي محدد اذا بدلنا الصفوف بالأعمدة والأعمدة بالصفوف بنفس ترتيبها فان قيمة المحدد لا تتغير.

مثال

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 4 & 0 & 7 \\ 8 & 14 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 8 \\ -3 & 0 & 14 \\ 5 & 7 & -3 \end{vmatrix}$$

② قيمة المحدد لا تتغير عند ايجاد قيمته عن طريق عناصر احد صفوفه أو احد اعمدته

مثال لايجاد قيمة المحدد نأخذ الصف الاول:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 4 \\ 5 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 54$$

نأخذ العمود الاول

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 4 \\ 5 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 54$$

③ في اي محدد اذا بدلنا موضعي صفين متتاليين او عمودين متتاليين فان قيمة المحدد الناتج تساوي قيمة المحدد الاصلي مضروباً في (1-).

مثال

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & -2 & -1 \\ -5 & 0 & 5 \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & -1 \\ 0 & -5 & 5 \end{vmatrix}$$

(5) اذا تساوت العناصر المتناظرة في أي صفين (أو عمودين) في محدد فان قيمة المحدد تساوي صفراً .

مثال

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & -4 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

لان عناصر الصف الاول = عناصر الصف الثالث

(6) اذا وجد عامل مشترك في جميع عناصر اي صف (أو اي عمود) في محدد فان هذا العامل يمكن اخذه خارج المحدد :

مثال

$$2\begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 6 & 7 & 8 \\ -1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 10 & 2 \\ 6 & 7 & 8 \\ -1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 5 & 1 \\ 12 & 7 & 8 \\ -2 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

(7) لا تتغير قيمة المحدد اذا أضيفت عناصر اي صف أو (عمود) مضروبة بعدد (k) الى العناصر المقابلة لها في صف أو عمود آخر .

مثال بدون فك المحدد أثبت أن

$$\begin{vmatrix} a+b & c+1 & 1 \\ b+c & a+1 & 1 \\ a+c & b+1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

الحل

نضيف العمود الاول الى الثاني فنحصل على

$$\begin{vmatrix} a+b & a+b+c+1 & 1 \\ b+c & a+b+c+1 & 1 \\ a+c & a+b+c+1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

وبما ان عناصر العمودين الثاني والثالث متساوية فناتج المحدد = 0 . (حسب ملاحظة 5)

مثال أثبت أن قيمة المحدد = صفر دون استخدام طريقة المحددات :

$$\begin{vmatrix} 3 & 9 & -2 \\ -1 & -3 & 5 \\ 2 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 3 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & 5 \\ 2 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

أخرجنا عامل مشترك 3 من العمود الثاني فأصبح عمودين الاول والثاني متساويين حسب خ (6) و خ (5) فالناتج = $3 \times 0 = 0$

مثال/ أثبت بإستخدام (خواص المحددات)

$$\begin{vmatrix} 7 & -4 & 4 \\ 42 & -15 & 6 \\ 21 & 2 & 12 \end{vmatrix} = -42 \begin{vmatrix} 1 & -4 & 4 \\ -2 & 5 & -1 \\ 3 & 2 & 6 \end{vmatrix}$$

الحل/ حسب الخاصية (5)

اخراج عامل مشترك 7 من العمود الاول

$$\begin{vmatrix} 7 & -4 & 4 \\ 42 & -15 & 6 \\ 21 & 2 & 12 \end{vmatrix} = 7 \begin{vmatrix} 1 & -4 & 4 \\ 6 & -15 & 6 \\ 3 & 2 & 12 \end{vmatrix}$$

اخراج عامل مشترك 2 من العمود الثالث

$$= 7 \times 2 \begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 6 & -15 & 3 \\ 3 & 2 & 6 \end{vmatrix}$$

اخراج عامل مشترك (-3) من الصف الثاني.

$$= 7 \times 2 \times (-3) \begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -2 & 5 & -1 \\ 3 & 2 & 6 \end{vmatrix}$$

الناتج

$$= -42 \begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -2 & 5 & -1 \\ 3 & 2 & 6 \end{vmatrix}$$

تمارين (4 - 10)

1) احسب قيمة المحددات الآتية:

(a) $\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 5 \times 6 - 0 \times 4 = 30$

(b) $\begin{vmatrix} -7 & 13 \\ 13 & -7 \end{vmatrix} = -7 \times (-7) - 13(13) = 49 - 169 = -120$

(c) $\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 4 \times 3 - 4 \times 3 = 0$

(d) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 1 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} + 6 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 0 \end{vmatrix}$

$= 2(0 - 0) + 1(1 - 5) + 6(0 - 0) = -4$

(e) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 4 & 0 & 7 \\ 5 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 0$ بما شرح من الخاصية (3) الدليل عناصر العمود الثاني جميعها 0

(f) , (g) تترك للطالب

④ جد حل كل من انظمة المعادلات الآتية باستخدام المحددات :

ⓐ
$x + 2y = 0$
$2x - 3y = 1$

الحل/ $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = (-3-4) = -7$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}}{-7} = \frac{0-2}{-7} = \frac{2}{7}$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}{-7} = \frac{1-0}{-7} = -\frac{1}{7}$$

ⓑ
$-3x - 5y = -1$
$x + 6y = 3$

الحل/ $\Delta = \begin{vmatrix} -3 & -5 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = -18 + 5 = -13$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}}{-13} = \frac{-6+15}{-13} = \frac{9}{-13}$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}}{-13} = \frac{-9+1}{-13} = \frac{8}{13}$$

ⓒ بعد ترتيب المعادلات كل منهم تترك للطالب حلها .

ⓐ
$6L - 7k = 0$
$4L + 3k = 0$

الحل/ $\Delta = \begin{vmatrix} 6 & -7 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 36$

$$L = \frac{\Delta L}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -7 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}}{36} = \frac{0}{36} = 0$$

$$k = \frac{\Delta k}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}}{36} = \frac{0}{36} = 0$$

ثم باستخدام المصفوفات حل انظمة المعادلات المذكورة في سؤال ②

ⓐ
$B = A^{-1}C$

$|A| = -7 \neq 0$ ∴ المصفوفة لها نظير ضربي

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{-7}\begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \end{bmatrix}$$

$$\therefore B = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{7} \\ -\frac{1}{7} \end{bmatrix}$$

$$\therefore B = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{7} \\ -\frac{1}{7} \end{bmatrix}$$

$\therefore x = \frac{2}{7}$
$y = -\frac{1}{7}$

وبنفس الطريقة تحل بقية الفروع

ج/ باستخدام المصفوفات حل انظمة المعادلات المذكورة في سؤال (2)

(a) $B = A^{-1}C$

$|A| = -7 \neq 0$ فالمصفوفة لها نظير ضربي

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{-7}\begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \end{bmatrix}$$

$$\therefore B = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{7} \\ -\frac{1}{7} \end{bmatrix}$$

$$\therefore B = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{7} \\ -\frac{1}{7} \end{bmatrix}$$

$$\therefore x = \frac{2}{7}, \quad y = -\frac{1}{7}$$

وبنفس الطريقة تحل بقية الفروع

(3) جد قيمة m التي تجعل نظام المعادلات الآتية حلاً :

$$x + 2y = 1$$
$$3x + my = 4$$

الحل/ لكي يكون للمعادلة حل يجب ان يكون قيمة المحدد $\neq 0$

$$\therefore \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & m \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow m - 6 \neq 0 \rightarrow m \neq 6$$

$$\therefore m \in R / \{6\}$$

(4) استخدم المحددات لحل انظمة المعادلات الآتية :

(a)
$$x + y + z = 1$$
$$2x - y - z = -1$$
$$3x + 2y = 2$$

الحل/ محدد المعاملات : $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

$$\therefore \Delta = 1\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \times (0 + 2) - 1(0 + 3) + 1(4 + 3) = 6$$

$$\therefore x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{6} = \frac{0}{6} = 0$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

$$z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{6} = \frac{0}{6} = 0$$

(b)
$$-x + 3y + z = 0$$
$$3x - 2y - z = 1$$
$$x + y + 2z = 0$$

الحل/ نفس الطريقة يكون المحدد $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -13$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{-13} = \frac{5}{-13}$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{-13} = \frac{-3}{-13} = \frac{3}{13}$$

$$z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{-13} = \frac{4}{-13}$$

ⓒ

$$3x = 2y + 3 + z \Rightarrow 3x - 2y - z = 3$$
$$2x - y + 4 = z \Rightarrow 2x - y - z = -4$$
$$y + z = -x + 3 \Rightarrow x + y + z = 3$$

تحل بنفس الطريقة السابقة

---

⑤ جد قيم m التي تجعل نظام المعادلات الآتية حلاً :

$$x - y + z = 0$$
$$x + y + mz = 0$$
$$-x - y + z = 1$$

الحل/

$$\Delta_{\text{محدد المعاملات}} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & m \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow$$

$$1\begin{vmatrix} 1 & m \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 1 & m \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow$$

$$1(1+m) + 1(1+m) + 1(-1+1) \neq 0 \Rightarrow$$
$$1 + m + 1 + m \neq 0 \Rightarrow$$
$$2 + 2m \neq 0 \Rightarrow$$
$$2m \neq -2 \Rightarrow$$
$$m \neq -1$$
$$\therefore m \in R \setminus \{-1\}$$

---

⑥ أثبت ان المبادلة بين صفي محددة من الدرجة الثانية يغير من اشارتها فقط اي انه:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}$$

الحل/

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$$

$$-\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = -(cb - ad) = ab - cb$$

$$\therefore \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}$$

(7) حل المعادلة الآتية واوجد قيمة (x)

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 1 \\ 8 & 1-x & -x \\ x & -1 & 1+x \end{vmatrix} = 0$$

الحل/

$$x\begin{vmatrix} 1-x & -x \\ -1 & 1+x \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 8 & -x \\ x & 1+x \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 8 & 1-x \\ x & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore x((1-x^2-x) - 0 + 1(-8 - x(1-x)) = 0$$

$$x(1-x^2-x) + (-8) - x + x^2 = 0$$

$$x - x^3 - x^2 - 8 - x + x^2 = 0$$

$$\therefore -x^3 - 8 = 0 \Rightarrow x^3 = -8 \Rightarrow x = -2$$

---

(8) باستخدام خواص المحددات جد قيمة ناتج المحدد :

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & -3 \\ -7 & 2 & 7 \\ 2 & 4 & -2 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} -3 & 5 & -3 \\ 7 & 2 & 7 \\ -2 & 4 & -2 \end{vmatrix} = -1 \times 0 = 0$$

بإخراج عامل مشترك (-1) من العمود الاول واستخدام الخاصية (5)
اذا تساوت عناصر عمودين في المحدد = 0 .

---

(9) اثبت باستخدام خواص المحددات

$$\begin{vmatrix} 15 & 6 & 5 \\ 6 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

الحل/

اخراج عامل مشترك (3) من العمود الاول

$$\begin{vmatrix} 15 & 6 & 5 \\ 6 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 5 & 6 & 5 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

اخراج عامل مشترك (2) من الصف الثاني

$$= 3 \times 2\begin{vmatrix} 5 & 6 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} 5 & 6 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

تمنياتي لكم بالنجاح والتوفيق - مدرس المادة / رعد العمار


دار
الاعرجي
للطباعة والنشر والتوزيع

